Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
Институт прикладной астрономии РАН

П.А. Тараканов, А.В. Веселова, М.И. Волобуева,
В.В. Григорьев, М.В. Костина, Б.Б. Эскин

Задачи XXV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады

Санкт-Петербург
2018

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор К.В. Холшевников (СПбГУ)
доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Пронин (РГПУ им. Герцена)

Печатается по постановлению
Учебно-методической комиссии по укрупненной группе направлений и специальностей 03.00.00 «Физика и астрономия»

Тараканов П.А., Веселова А.В., Волобуева М.И., Григорьев В.В., Костина М.В., Эскин Б.Б.

Задачи XXV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады: учебно-методическое пособие — СПб, 2018. — 92 с.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на XXV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиаде (2017–2018 учебный год) и решения задач. Сборник может быть использован как для углубленного изучения астрономии в средней школе (в том числе для подготовки к олимпиадам различных уровней), т.к и в рамках курса «Общая астрономия» студентов Астрономического отделения СПбГУ и других университетов, ведущих подготовку астрономов или учителей физики и астрономии.

1 Введение

В 1993 году в Санкт-Петербурге прошла первая экспериментальная городская олимпиада по астрономии. Она была настолько экспериментальной, что даже не получила порядкового номера. Правила ее проведения сильно отличались от последующих олимпиад, в частности не было разделения по возрастным группам.

Следующая олимпиада — 1994 года — проводилась уже по правилам, которые в своей основе сохранились до настоящего времени. Школьникам было предложено пять заданий, разбитых на две группы: для 8–9 и 10–11 классов. В 1995 году впервые появились задания для 6 и 7 классов, которые впоследствии стали обязательной составной частью олимпиад, а в 2009 году появилась и параллель 5 класса.

Олимпиада развивалась, увеличивалось количество участников олимпиады. Это привело к необходимости предварительного отбора участников, и к концу 90-х годов появился заочный отборочный (а затем, с 2010 года, и очный) тур, задача которого состояла в предварительном отборе участников теоретического тура олимпиады.

Постепенно сформировались традиции Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. Среди этих традиций — задачи, максимально приближенные к реальной работе астронома, желательно на основе реальных астрономических событий и данных, составление практически непересекающихся комплектов заданий для различных возрастных параллелей, причем только «собственного производства». На Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде запрещается пользоваться калькуляторами, чтобы приучать школьников проводить оценочные расчеты и корректно учитывать точность используемых данных.

С 2003 года олимпиада стала открытой, в ней начали принимать участие школьники из различных регионов РФ, а затем и других стран. Начиная с 2010 года туры олимпиады проводятся одновременно во многих городах. В последние годы олимпиада проходит примерно на 50 площадках в различных регионах России и 12 других стран.

Предлагаемые на Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде задачи, как правило, обладают некоторыми специфическими особенностями. Первой особенностью является необычно большая доля задач астрофизической тематики, в том числе и тех разделов, которые, как правило, в традиционных курсах астрономии для школ и кружков практически не рассматриваются (физика межзвездной среды, космология, радиоастрономия и т.д.). В целом от участника олимпиады требуется не только умение решать задачи по астрономии «классического» типа, но и широкие знания по всем разделам астрономии и умение этими знаниями пользоваться.

Еще одной особенностью является необходимость оценки промежуточных данных, нужных для решения задач. Как правило, участникам олимпиады сообщаются только те числовые данные, которые школьники заведомо не могут оценить или получить из других известных им величин (по крайней мере, за отведенное на решение задач время). Основные физические константы также считаются известными участникам.

Как правило, задачи олимпиады требуют для решения повышенного уровня знаний по физике и математике. Например, уравнение, получившееся в процессе решения задачи, может оказаться нетривиальным, и для его решения потребуется либо воспользоваться каким-либо «олимпиадным» математическим приемом, либо аккуратно упростить его, воспользовавшись физически корректным приближением. В силу специфики предмета олимпиады необходимые дополнительные знания по физике и математике нередко выходят даже за пределы «классической» тематики физических и математических олимпиад. В качестве примеров можно упомянуть физику излучения (в т.ч. и квантовую), ядерную физику, некоторые разделы математического анализа и геометрии, теорию погрешностей и т.д.

По сложившейся традиции какими-либо вычислительными средствами (калькуляторами и т.п.) на заключительном этапе олимпиады (теоретическом и практическом турах) пользоваться запрещено, однако на олимпиадах практически отсутствуют задачи, решить которые без трудоемких вычислений невозможно. В то же время иногда встречаются задачи, существенным элементом решения которых является нахождение эффективных методов получения численного ответа.

На каждом из туров, кроме практического, участникам предлагается решить по 5 задач. На решение задач очного отборочного тура отводится 3 часа, при этом можно пользоваться калькуляторами, но не справочными данными и литературой. Заочный отборочный тур занимает около месяца, при выполнении его заданий можно пользоваться любыми данными (нередко для решения задачи нужно предварительно найти какие-либо дополнительные данные) и любой вычислительной техникой (в частности, одним из возможных методов решения задач может быть программное моделирование).

На турах заключительного этапа — теоретическом и практическом — запрещены уже любые справочные данные и вычислительная техника. На решение 5 задач теоретического тура у участников есть 4 часа, на практическом туре, продолжающемся 2.5 часа, в каждой параллели предлагается одна (иногда две) задачи, связанных с обработкой наблюдательных данных, их интерпретацией, разработкой методов наблюдений и т.п.

<table>
<tr><th rowspan="2">Туры</th><th colspan="7">Класс</th></tr>
<tr><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th></tr>
<tr><td>очный отборочный</td><td colspan="3">1–5</td><td colspan="2">6–10</td><td>11–15</td><td>16–20</td></tr>
<tr><td>заочный отборочный</td><td colspan="2">21–25</td><td colspan="2">26–30</td><td>31–35</td><td>36–40</td><td>41–45</td></tr>
<tr><td>теоретический</td><td colspan="2">45–50</td><td colspan="2">51–55</td><td>56–60</td><td>61–65</td><td>66–70</td></tr>
<tr><td>практический</td><td colspan="2">71</td><td colspan="2">72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td></tr>
</table>

В таблице указано, на каком из туров и каким классам предлагались задачи, включенные в сборник. По традиции задачи для младших возрастных параллелей общие для двух (иногда трех) классов, однако итоговый конкурс является раздельным и места победителей и призеров присуждаются в каждом классе отдельно.

В разделе 2 сборника для удобства самостоятельной работы с ним приведены только условия задач, раздел 3 содержит как условия, т.к и решения задач.

Авторами задач, включенных в сборник, являются А.В. Веселова, М.И. Волобуева, В.В. Григорьев, М.В. Костина, И.Д. Маркозов, И.И. Никифоров, Н.П. Питьев, И.С. Потравнов, С.С. Савченко, П.А. Тараканов, И.А. Утешев, Б.Б. Эскин, А.А. Юдин.

2 Условия задач

Задача № 1

Найдите в списке лишний объект и объясните, почему он лишний: Лебедь, Рак, Щука, Волк, Журавль.

Задача № 2

Юный астроном вышел задолго до восхода Солнца во двор, чтобы пронаблюдать недавно открытый им метеорный поток ноябрьских α–Пегасид. Сколько метеоров, вылетающих из Квадрата Пегаса (со стороной 15°), увидит юный астроном за два часа наблюдений, если известно, что в час с одного квадратного градуса неба в среднем вылетает 0.02 метеоров?

Задача № 3

Почему кометы часто летают хвостом вперед, а метеоры — всегда хвостом назад?

Задача № 4

23 ноября 1837 года родился голландский физик, лауреат Нобелевской премии Йоханнес Дидерик Ван дер Ваальс. В какой день недели это случилось?

Задача № 5

Петербургская школьница Маша как-то вечером вышла на улицу и увидела полную Луну. После этого в Петербурге надолго зарядил дождь. В первый же ясный вечер Маша опять вышла на улицу и увидела Луну, у которой была освещена половина диска. Сколько дней в Петербурге непрерывно шел дождь?

Задача № 6

В какую сторону и с какой скоростью нужно двигаться марсианину, находящемуся на экваторе Марса, чтобы солнечные сутки для него длились столько же, сколько для неподвижного землянина на Земле? Период обращения Марса вокруг оси — 24 часа 37 минут, радиус Марса — 2.3 тыс. км.

Задача № 7

В Санкт-Петербурге полная Луна видна в полночь на высоте 30°. Оцените ее высоту в полночь через две недели.

Задача № 8

Туманность «Кошачья Лапа» (NGC 6334) имеет видимые размеры $40' \times 20'$ и расположена на расстоянии 1700 пк от Солнца. Во сколько раз по линейным размерам данная туманность превышает линейные размеры лапки кошки (считая их равными 3 см)?

Задача № 9

Туманность NGC 6334 из предыдущей задачи была открыта английским астрономом Джоном Гершелем 7 июня 1837 года. В какой день недели это произошло?

Задача № 10

Около звезды Проксимы Центавра недавно обнаружена планета. Как Вы думаете, какой примерно по яркости (самой яркой, т. е. первой, пятой, сотой и т. п.) звездой на ночном небе этой планеты является Солнце? Обоснуйте свой ответ.

Задача № 11

> «…Но оставим Чуба изливать на досуге свою досаду и возвратимся к кузнецу, потому что уже на дворе, верно, есть час девятый [вечера].
>
> Сначала страшно показалось Вакуле, когда поднялся он от земли на такую высоту, что ничего уже не мог видеть внизу, и пролетел как муха под самым месяцем так, что если бы не наклонился немного, то зацепил бы его шапкою…»

Н.В. Гоголь, «Ночь перед Рождеством»

Какой вид имел месяц, если он находился в верхней кульминации?

Предположим, что в момент пролета «под самым месяцем» последний находился не только в кульминации, но и в зените. Оцените минимально возможное расстояние, которое пришлось преодолеть Вакуле на пути в Петербург.

Задача № 12

Объект Оумуамуа, не принадлежащий Солнечной системе, пролетел мимо Солнца на минимальном расстоянии 0.25 а.е. С какой скоростью он должен был двигаться при этом относительно Солнца?

Задача № 13

Уильям Гершель за единицу расстояния в Галактике принял расстояние от Солнца до Сириуса, считая Сириус звездой, подобной Солнцу. Во сколько раз такая единица расстояния меньше настоящего расстояния между данными звездами? Годичный параллакс Сириуса $0''.4$, видимая звездная величина $-1^m.5$.

Задача № 14

Существует легенда, что днем из глубокого колодца невооруженным глазом можно увидеть звезды. А сколько в среднем звезд одновременно можно увидеть из глубокого колодца ночью? Глубина колодца 20 м, диаметр — 1 м.

Задача № 15

Обитатели третьей планеты в системе Медузы наблюдают вторую планету в этой же системе. Максимальная элонгация второй планеты составляет $30°$. Все планеты в системе движутся по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости. Как часто жители третьей планеты будут наблюдать прохождение второй планеты по диску Медузы?

Задача № 16

Пульсар — это нейтронная звезда, которая очень быстро вращается. Ее масса равна $1.4\,\mathfrak{M}_{\odot}$ (1.4 массы Солнца), радиус 10 км. Какой может быть максимально возможная линейная скорость точки на экваторе пульсара?

Задача № 17

На каком расстоянии от Бетельгейзе должна находиться планета, движущаяся вокруг звезды по круговой орбите, чтобы получать такое же количество света в единицу времени, что и Земля? Абсолютные звездные величины Бетельгейзе и Солнца равны -5^m и $+5^m$ соответственно. Определите продолжительность года на такой планете и выразите ее в земных годах, если известно, что масса Бетельгейзе $\mathfrak{M}_{\text{Б}} = 15\,\mathfrak{M}_{\odot}$.

Задача № 18

Искусственный спутник Земли летает по круговой орбите высотой 600 км в плоскости земного экватора. На экваторе в пункте наблюдения установлена неподвижная камера, поле зрения которой составляет $2.6° \times 2.6°$. Оцените максимальный промежуток времени, в течение которого камера сможет непрерывно наблюдать спутник.

Задача № 19

В древнем Египте в элитные войска фараона набирали юношей, которые могли различить звезды Мицар и Алькор. Человек с неострым зрением видит эти звезды как одну. Какую звездную величину для такого человека будет иметь такая «сдвоенная» звезда, если видимая звездная величина Алькора равна $+4^m$, абсолютная звездная величина Мицара равна $+0^m.3$, а его параллакс равен $0''.04$.

Задача № 20

Величина высоты верхней кульминации звезды, наблюдающейся в северном полушарии, совпадает с величиной зенитного расстояния этой же звезды в нижней кульминации. Определить широту наблюдения и склонение звезды. Рефракцию не учитывать.

Задача № 21

На небе видна Луна в третьей четверти. Известно, что в ближайшее время ожидается лунное затмение. Через какое время оно произойдет? Поясните свой ответ.

Задача № 22

Радиотелескоп РТ-32 обсерватории «Светлое» Института прикладной астрономии РАН в Санкт-Петербурге каждый день наблюдений накапливает 1 терабайт (10^{12} байт) информации. С какой минимальной скоростью необходимо передавать эту информацию в центр обработки данных института, чтобы обработка данных не отставала от наблюдений?

Задача № 23

Почему трассы космических кораблей проходят, как правило, с запада на восток?

Задача № 24

Известно, что Луна в своем движении по небу иногда заходит в созвездие Ориона. А бывают ли солнечные затмения, когда Луна в Орионе? Объясните свой ответ.

Задача № 25

Оцените свой возраст в галактических секундах. Будем считать, что галактический год разделен на 365 галактических дней по 24 галактических часа. Час же разделен на 60 минут по 60 секунд.

Задача № 26

29 января наблюдатель на экваторе в пункте с долготой 30° в.д. наблюдал полную Луну в зените. Его коллега в пункте с долготой 60° з.д. наблюдал в это же время Марс в зените. В каком созвездии находится Марс в этот момент?

Задача № 27

При исследовании центра Галактики была получена карта центральной области размером 30×30 пк. Известно, что расстояние до центра Галактики равно 8.3 кпк. Какие угловые размеры (в угловых минутах) имеет данная область?

Задача № 28

У какой из двух планет — Марса или Нептуна — больше будет отличаться минимально возможная и максимально возможная яркость при наблюдении с Земли? Почему?

Задача № 29

Известно, что Юпитер находится в 5 раз дальше от Солнца, чем Земля, его диаметр в 10 раз больше земного, а сутки на нем длятся 10 земных часов. Представьте, что к поверхности Земли и Юпитера (к экватору) прикрепили концы длинных нерастяжимых веревок, а вторые их концы протянули к Солнцу. В результате вращения планет веревки будут наматываться на планеты. Какая из планет намотает на себя свою веревку быстрее? Юпитер можно считать твердым (т.к. условие задачи сумасшедшее, то будем считать, что твердая поверхность Юпитера также имеет право на существование).

Задача № 30

Определите возможные расстояния между Марсом и Венерой, когда Марс находится в квадратуре, а Венера в максимальной элонгации. Орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Задача № 31

На каких широтах полярная ночь представляет собой действительно ночь, т.е. даже в полдень небо достаточно темное и видны звезды, по крайней мере, самые яркие?

Задача № 32

Большая полуось орбиты астероида составляет 1.5 а.е., эксцентриситет равен 0.3, наклон к плоскости эклиптики равен нулю. Найдите отношение максимального и минимального возможных расстояний между астероидом и Землей.

Задача № 33

Вторая «Звезда Смерти», имеющая диаметр 900 км, вышла на круговую орбиту вокруг Земли. Каким мог быть период ее обращения вокруг Земли, если известно, что для наблюдателей на поверхности Земли «Звезда Смерти» иногда полностью затмевала Солнце?

Задача № 34

АМС, находящаяся на расстоянии 35 а.е. от Солнца, наблюдает Юпитер в верхнем соединении. Оцените видимую звездную величину Юпитера. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е.

Задача № 35

Предполагается, что в галактике Маркарян 231 в центральной области находятся две сверхмассивные черные дыры с массами 150 миллионов масс Солнца и 4 миллиона масс Солнца. Данные черные дыры обращаются друг вокруг друга с периодом 1.2 года по круговым орбитам. Известно также, что вокруг Солнца обращается транснептуновый объект Седна. Можно ли уместить орбиту Седны между этими двумя черными дырами, если расположить ее в той же плоскости, что и орбиты черных дыр?

Задача № 36

Эффективная температура красного гиганта в 2 раза меньше эффективной температуры Солнца. Его радиус составляет 70 радиусов Солнца. Определите абсолютную звездную величину красного гиганта.

Задача № 37

При вспышке сверхновой в виде нейтрино выделилась энергия около 10^{46} Дж. Какую суммарную массу должны иметь тела, состоящие из материи и антиматерии, при аннигиляции которых выделилось бы столько же энергии?

Задача № 38

Один крайне наблюдательный астроном заметил следующее:

- высота верхней кульминации некоторой звезды в два раза больше высоты ее нижней кульминации;
- склонение этой звезды в три раза больше широты города, где живет данный астроном.

Найдите склонение звезды, высоты ее кульминаций, а также широту города, где живет астроном.

Задача № 39

Два радиотелескопа РТ-32 Института прикладной астрономии РАН, расположенных в Ленинградской области и в Республике Бурятия, проводят совместные наблюдения в режиме интерферометра на длине волны 13 см. Оцените угловое разрешение такого интерферометра в секундах, если известно, что расстояние между обсерваториями составляет примерно 4300 км.

Задача № 40

15 сентября 2017 года в атмосфере Сатурна сгорела АМС Кассини. В качестве одного из вариантов окончания миссии Кассини-Гюйгенс рассматривался вариант столкновения АМС с Меркурием. Оцените, когда могло бы произойти такое столкновение и с какой относительной скоростью, если траектория полета была бы наименее энергозатратной. За момент отлета от Сатурна принять вышеуказанную дату. Для достижения каких целей можно было бы реализовать этот вариант?

Задача № 41

Советская АМС Луна–10 с 3 апреля по 29 мая 1966 года совершила 460 оборотов вокруг Луны по эллиптической орбите. Определите максимально возможное угловое расстояние между АМС и центром Луны для наблюдателя с Земли, если минимальная высота полета АМС над поверхностью Луны составляла 350 км.

Задача № 42

Стандартная теория эволюции звезд утверждает, что 4 миллиарда лет назад наше Солнце излучало на 30% меньше энергии, чем сейчас. На основании этих данных оцените среднюю температуру на Земле в тот период, если считать, что орбита Земли и строение ее атмосферы в тот момент были в точности такими же, как сейчас.

Задача № 43

15 сентября 2014 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны. Известно, что в результате слияния двух черных дыр в виде гравитационного излучения в течение 0.1 секунды высветилась масса, равная 3 массам Солнца. 17 августа 2017 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны от двух слившихся нейтронных звезд. При этом слиянии в виде гравитационного излучения выделилось 0.03 массы Солнца за 100 секунд. Определите разность абсолютных «гравитационных звездных величин» этих событий.

Задача № 44

Некоторая звезда имеет склонение $\delta_1 = -8^\circ$ и заходит за горизонт в некотором городе в точке с азимутом $A_1 = 74^\circ$. Какой азимут в момент захода будет иметь звезда со склонением $\delta_2 = 6^\circ$ при наблюдении из того же города? Какова широта этого города?

Задача № 45

Пусть инопланетный наблюдатель изучает нашу Солнечную систему из окрестностей звезды χ Dra. Какую планету он откроет первой и каким методом?

Задача № 46

Студент-астроном заметил, что несколько дней подряд ложится спать в момент восхода Бетельгейзе (α Ориона) над горизонтом. Раньше или позже он ложится в каждый последующий день? В какое время года ему удается наблюдать восход данной звезды?

Задача № 47

Определите, какие дни недели были 4 февраля 1918 года в Югославии, Болгарии и России, в которых сегодня проходит олимпиада. Примечание: Болгария перешла на григорианский календарь в 1916 году, Югославия — в 1919 году.

Задача № 48

У полярника, зимующего неподалеку от Северного полюса, остановились часы. На какой минимальной широте полярник сможет бегать вокруг полюса так, чтобы его часы постоянно показывали точное местное время?

Задача № 49

В изданном 95 лет назад задачнике по астрономии упоминается «Звезда Великой Октябрьской Революции», выбор которой был обусловлен тем, что она видна в лучах заходящего Солнца в день Революции. Что это за звезда? Какого она цвета?

Задача № 50

В одном из фильмов о «людях в черном» у кота по кличке Орион в подвеске к ошейнику была заключена галактика. Если предположить, что радиус подвески равен 1 см, а галактика (является уменьшенной копией нашей) имеет радиус $R = 50$ тысяч световых лет, то во сколько раз больше или меньше протона были бы звезды типа Солнца в таком масштабе? Радиус протона 10^{-13} см.

Задача № 51

Максимальная высота над горизонтом звезды Процион для наблюдателя в Санкт-Петербурге составляет $35°$. Верно ли утверждение, что везде, где на Земле водится енот-полоскун (*Procyon lotor* на латыни), виден «небесный собрат» енота?

Задача № 52

С какой пространственной скоростью геостационарный спутник движется относительно точки экватора, над которой находится? Геостационарным спутником называется спутник, вращающийся вокруг Земли в плоскости экватора таким образом, что он постоянно находится над одной и той же точкой экватора (на высоте 36 тыс. км над ней).

Задача № 53

В полдень 22 марта в столице Болгарии Софии в комнате с закрытым занавеской окном на противоположной окну стене комнаты виден «зайчик» от дырки в занавеске. Расстояние между окном и противоположной стеной равно 5 метрам. В какую сторону движется «зайчик» для человека, смотрящего на него? Оцените скорость его движения.

Задача № 54

В какой-то момент произошло прохождение Венеры по диску Юпитера, видимое с Земли. Оцените максимально возможную и минимально возможную часть диска Юпитера, которая могла была закрыта Венерой в момент максимальной фазы покрытия. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е., радиус орбиты Венеры 0.7 а.е., радиус Юпитера в 12 раз больше радиуса Венеры.

Задача № 55

Межзвездный корабль терпит бедствие на границе Солнечной системы. Капитан корабля посылает радиосигнал ко всем большим планетам Солнечной системы. Сколько времени может пройти между приемами сигналов на планетах? Орбиты планет считать круговыми. Докажите, что существует такое расположение планет, при котором сигнал будет принят на всех планетах одновременно.

Задача № 56

В некоторый день Луна, будучи в полнолунии, покрыла Альдебаран. Через месяц Луна снова покрыла Альдебаран. Какой была фаза Луны (с точностью до 1%) во время второго покрытия?

Задача № 57

В Древней Греции термином «стадий» называли расстояние, которое человек проходит за время восхода Солнца. Определим аналогичное понятие для Луны: лунным стадием назовем расстояние, которое пройдет наблюдатель в течение времени восхода Земли для этого наблюдателя. Оцените минимальную величину такого лунного стадия.

Задача № 58

Маша увидела мем в интернете: «На верхней полке ехать выгодно! За счет кривизны поверхности Земли верхняя полка описывает дугу большего радиуса, чем нижняя. Соответственно, на верхней полке за те же деньги проезжаешь чуть большее расстояние.» «А ведь и правда!» — подумала Маша и купила билет на верхнюю полку. Сколько денег сэкономит Маша на пути из Петербурга в Москву, если билет стоит 1200 рублей? Москва находится на $7^\circ.5$ восточнее и на 4° южнее Петербурга, железная дорога соединяет города по кратчайшему расстоянию.

Задача № 59

12 сентября 2014 года кульминация Дубхе ($\alpha = 11^h04^m, \delta = 61^\circ 40'$) в центре Санкт-Петербурга (на широте $\varphi = 59^\circ 56'$) наблюдалась в 23^h46^m по истинному солнечному времени. В этот же момент кульминировала вторая звезда, причем сумма высот этих звезд составила 90°. Определите склонение второй звезды.

Задача № 60

Собственное движение второй звезды в два раза меньше, чем первой, а видимая звездная величина на единицу больше. У какой звезды лучевая скорость больше, если полные скорости их равны, а также равны светимости?

Задача № 61

Согласно «Сильмариллиону», движущиеся вокруг Арды Луна (*Итиль*) и Солнце (*Анор*) были созданы для освещения земель после гибели Древ Валар. Предположим, что Итиль и Анор движутся по круговым орбитам почти одинаковых радиусов, причем радиус орбит в несколько раз превышает радиус Арды. Известно, что угловые диаметры Итиль и Анора равны 0.5°, видимая звездная величина Анора в зените совпадает с солнечной. Определите видимую звездную величину Итиль в «полнолуние», считая, что Итиль отражает 40% падающего на ее поверхность света Анора.

Задача № 62

Двойная звезда с обращающимися по круговой орбите компонентами равных масс наблюдается на телескопе с диаметром 50 см. Известно, что каждый компонент имеет предельную для данного телескопа видимую звездную величину при наблюдении глазом, а угловое расстояние между звездами совпадает с разрешающей способностью телескопа. Обе звезды являются звездами главной последовательности. Каков период обращения данных звезд, если расстояние до них равно 1000 пк?

Задача № 63

По-словенски Млечный Путь называется «Римской дорогой» (*Rimska cesta*). Если все дороги ведут в Рим, то уж Римская точно должна. Верно ли это для жителя Любляны, наблюдающего проходящий через зенит Млечный Путь? Найдите угол между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой». Координаты столицы Словении Любляны: 46° с.ш., $14°30'$ в.д., координаты Рима: 42° с.ш., $12°30'$ в.д. Считайте что координаты северного полюса Галактики $\alpha = 12^h50^m$ и $\delta = +27°$.

Задача № 64

В галактике на расстоянии 44 Мпк наблюдается мазерный радиоисточник (излучающий на фиксированной длине волны), двигающийся вблизи центральной черной дыры. Орбита источника перпендикулярна картинной плоскости, а большая ось лежит в картинной плоскости. Угловые размеры орбиты источника составляют $0''.0005$, относительное смещение спектральных линий для наблюдаемой звезды относительно лабораторной длины волны составляет от 0.008 до 0.011. Определите массу центральной черной дыры. Собственным вращением звезды пренебречь.

Задача № 65

Оцените среднюю поверхностную плотность протопланетного диска, из которого была образована наша Солнечная система, если по современным представлениям отношение пылевой компоненты в диске составляет 1% от газовой компоненты, а пояс Койпера образовался на его краю.

Задача № 66

В повести Н. Носова «Незнайка на Луне» приключения главного героя проходили внутри полой Луны, среди коротышек, живущих на ядре внутри Луны. Представим, что в результате тотальной войны между обитателями Луны внешняя оболочка распалась на небольшие фрагменты, не связанные друг с другом. За какое время эти фрагменты упадут на ядро? Считайте, что масса Луны распределена поровну между ядром и оболочкой, масса оболочки распределена по ней равномерно, толщина оболочки и размер ядра пренебрежимо малы в сравнении с радиусом Луны.

Задача № 67

Солнечный парус, изначально покоившийся на земной орбите, вследствие солнечной вспышки приобрел скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от Солнца. Как далеко от Солнца он сможет улететь? Гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь, парус полностью отражает все падающее на него излучение.

Задача № 68

Транснептуновый объект (174567) Варда в настоящее время имеет видимую звездную величину 21^m (при наблюдении с Земли) и находится на расстоянии 48 а.е. от Солнца. Оцените диаметр Варды, если ее поверхность отражает 10% падающего на нее света. Видимая звездная величина Солнца (также при наблюдении с Земли) составляет -27^m.

Задача № 69

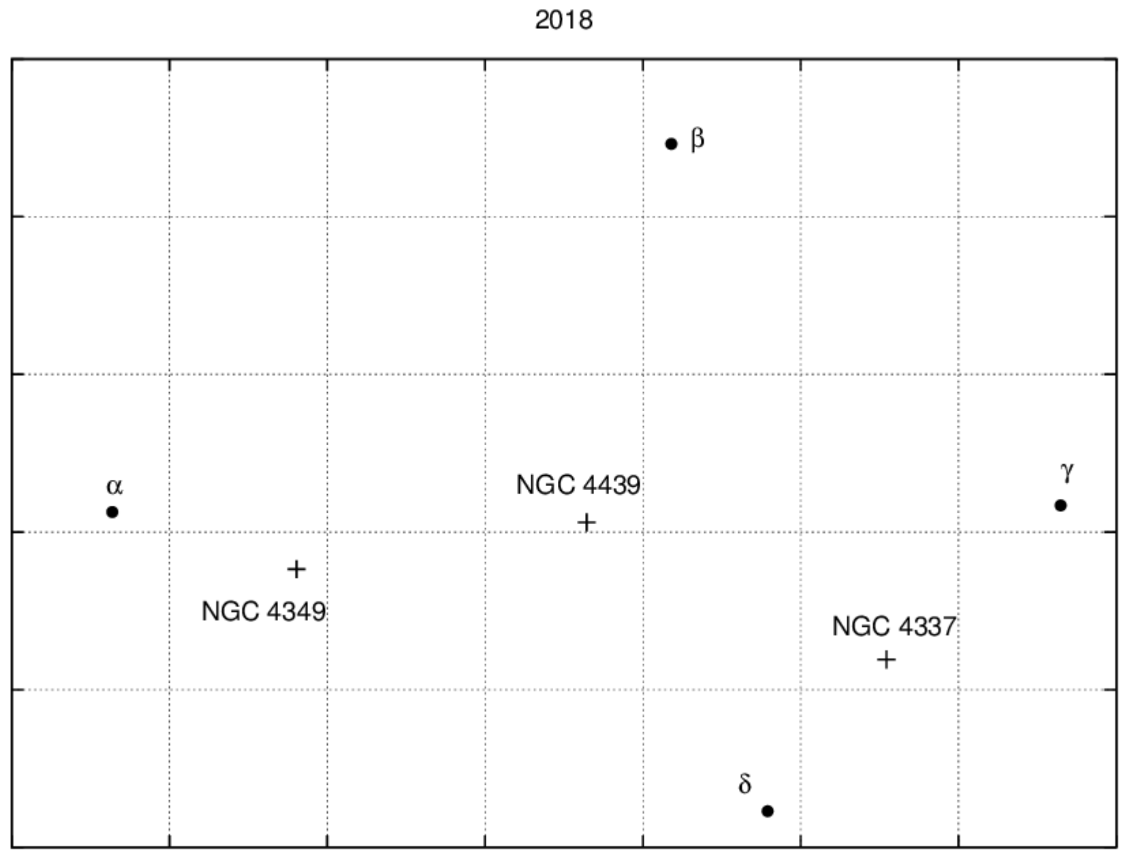
Определите, на какой широте можно одновременно наблюдать звезды $\alpha\ For$ ($\alpha = 3^h12^m, \delta = -28°59'$) и $\varepsilon\ CMa$ ($\alpha = 6^h58^m, \delta = -28°58'$) на горизонте? Атмосферной рефракцией пренебречь.

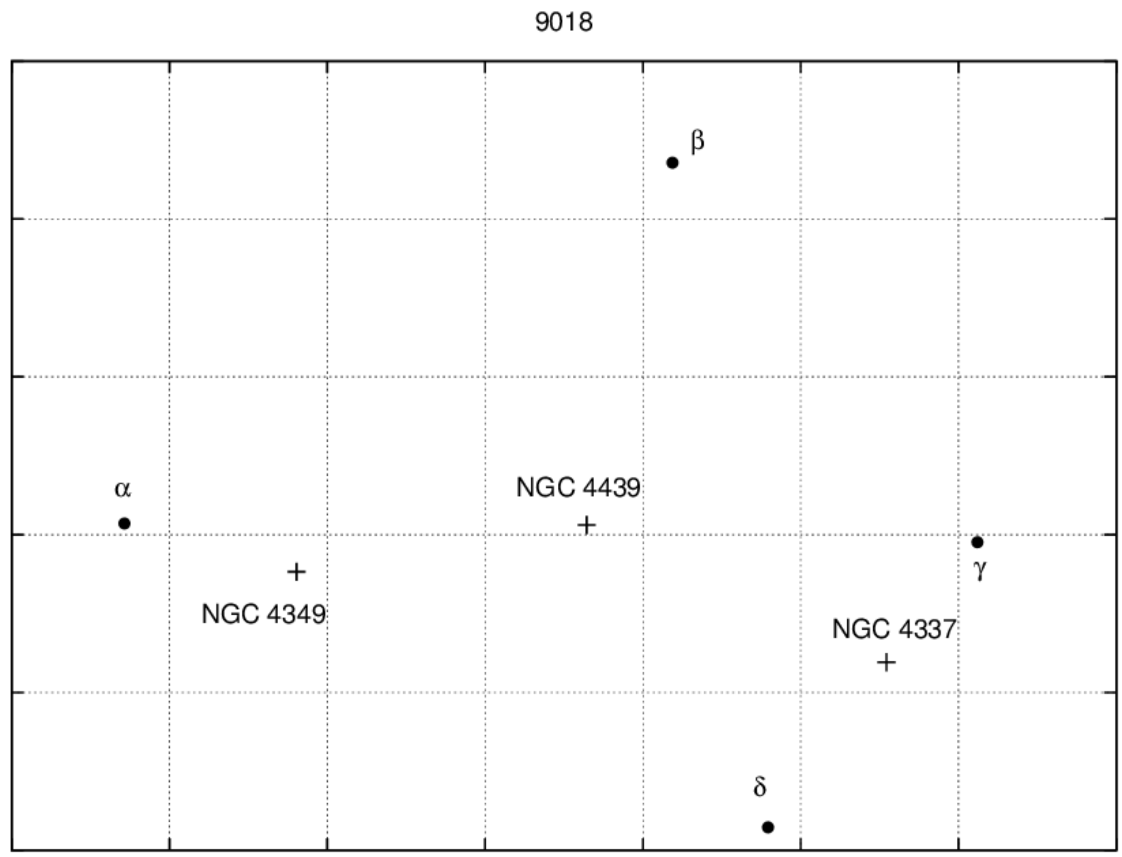
Задача № 70

При рентгеновских наблюдениях нейтронной звезды с массой, равной 1.4 $\mathfrak{M}_\odot$, и радиусом 11 км была найдена эмиссионная линия с энергией квантов 400 кэВ. В результате какого процесса эта линия образовалась? На какой высоте над поверхностью звезды этот процесс происходил?

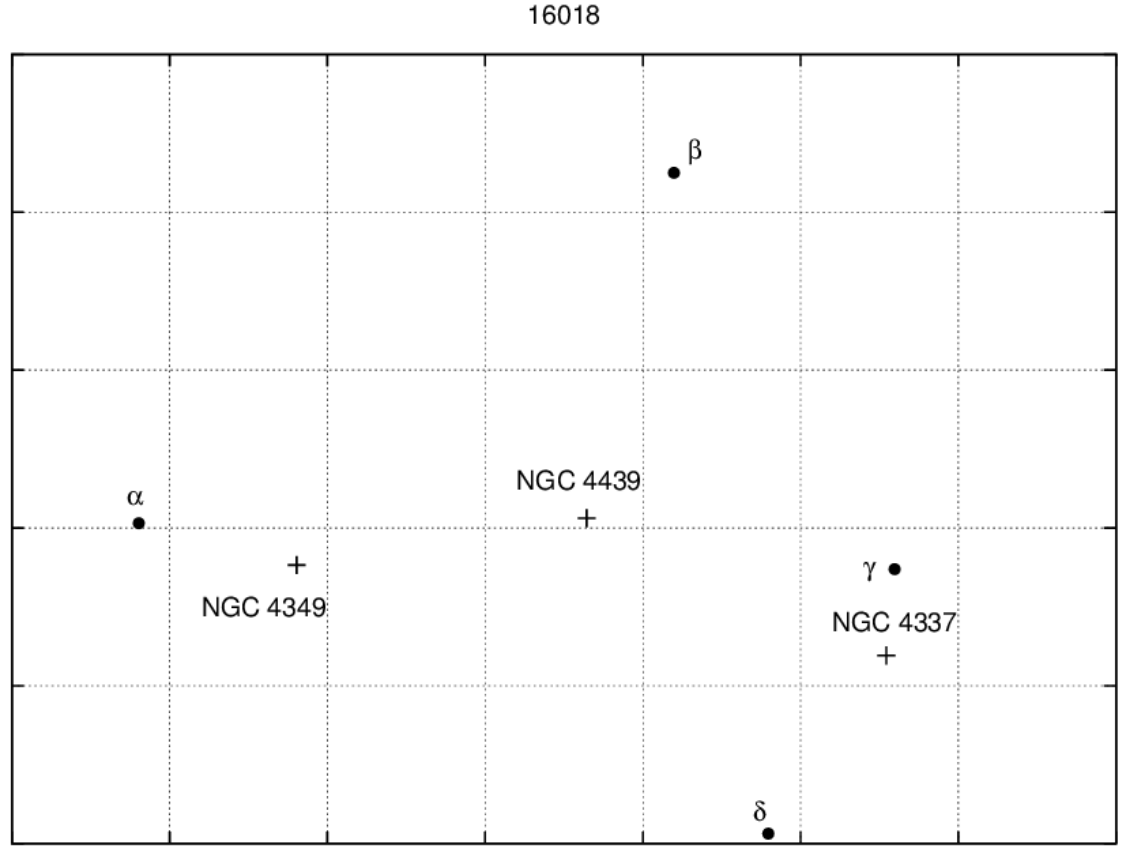
Задача № 71

Вам даны три карты, показывающие взаимное расположение четырех звезд α, β, γ и δ созвездия Южный Крест. Также на картах отмечены несколько объектов далекого космоса (NGC 4337, NGC 4349 и NGC 4439). Первая карта показывает расположение звезд на 2018 год, вторая — на 9018 год, третья — на 16018 год. Определите, начиная с какого года данные звезды перестанут образовывать крест, т.е. отрезок, соединяющий α и γ Южного Креста, перестанет пересекать отрезок, соединяющий β и δ. Оцените точность сделанного Вами определения.


2018
β
α
NGC 4439
γ
NGC 4349
NGC 4337
δ


9018
β
α
NGC 4439
NGC 4349
γ
NGC 4337
δ

К задаче № 71.



К задаче № 71.

Задача № 72

При наблюдениях близких галактик были измерены расстояния до них, а также их лучевые скорости (т.к называется скорость, с которой объект — в данном случае галактика — удаляется от нас или приближается к нам). Результаты наблюдений приведены в таблице ниже. Расстояния r даны в килопарсеках, лучевые скорости v — в километрах в секунду, причем положительное значение означает, что галактика удаляется от нас, а отрицательное — что приближается.

Найдите зависимость лучевой скорости галактики от расстояния до нее, определите параметры этой зависимости и оцените погрешность определения параметров.

Задача № 73

Перед Вами негатив фотографии, на которой изображены две достопримечательности Санкт-Петербурга на фоне кроваво-красной Луны: самый высокий небоскреб в России и Европе «Лахта-центр» и стадион «Санкт-Петербург», более известный под неофициальным названием «Зенит-Арена». Во многих СМИ этот снимок был представлен как фотография полного лунного затмения 31 января 2018 года.

Галактика	r, кпк	v, км/с
SMC	32	+170
NGC 221	275	−185
NGC 224	275	−220
NGC 278	1520	+650
NGC 584	3450	+1800
NGC 598	263	−70
NGC 936	2370	+1300
NGC 1023	620	+300
NGC 1069	1000	+920
NGC 1700	1160	+800
NGC 2681	1420	+700
NGC 2683	670	+400
NGC 2841	1240	+600
NGC 3031	900	−30
NGC 3034	790	+290
NGC 3115	1000	+600
NGC 3368	1740	+940
NGC 3379	1490	+810
NGC 3489	1100	+600
NGC 3521	1270	+730
NGC 3623	1530	+800
NGC 3627	900	+650

Галактика	r, кпк	v, км/с
LMC	34	+290
NGC 4111	1790	+800
NGC 4151	1700	+960
NGC 4214	800	+300
NGC 4258	1400	+500
NGC 4382	2000	+500
NGC 4449	630	+200
NGC 4472	2000	+850
NGC 4486	2000	+800
NGC 4526	1200	+580
NGC 4565	2350	+1100
NGC 4594	2230	+1140
NGC 4649	2000	+1090
NGC 4736	500	+290
NGC 4826	900	+150
NGC 5005	2060	+900
NGC 5055	1100	+450
NGC 5194	500	+270
NGC 5236	900	+500
NGC 5457	450	+200
NGC 5866	1730	+650
NGC 6822	214	−130

К задаче № 72.

A) Может ли этот снимок на самом деле быть фотографией указанного затмения (в какой-нибудь из фаз)? Объясните свой ответ.

B) Оцените горизонтальные координаты Луны.

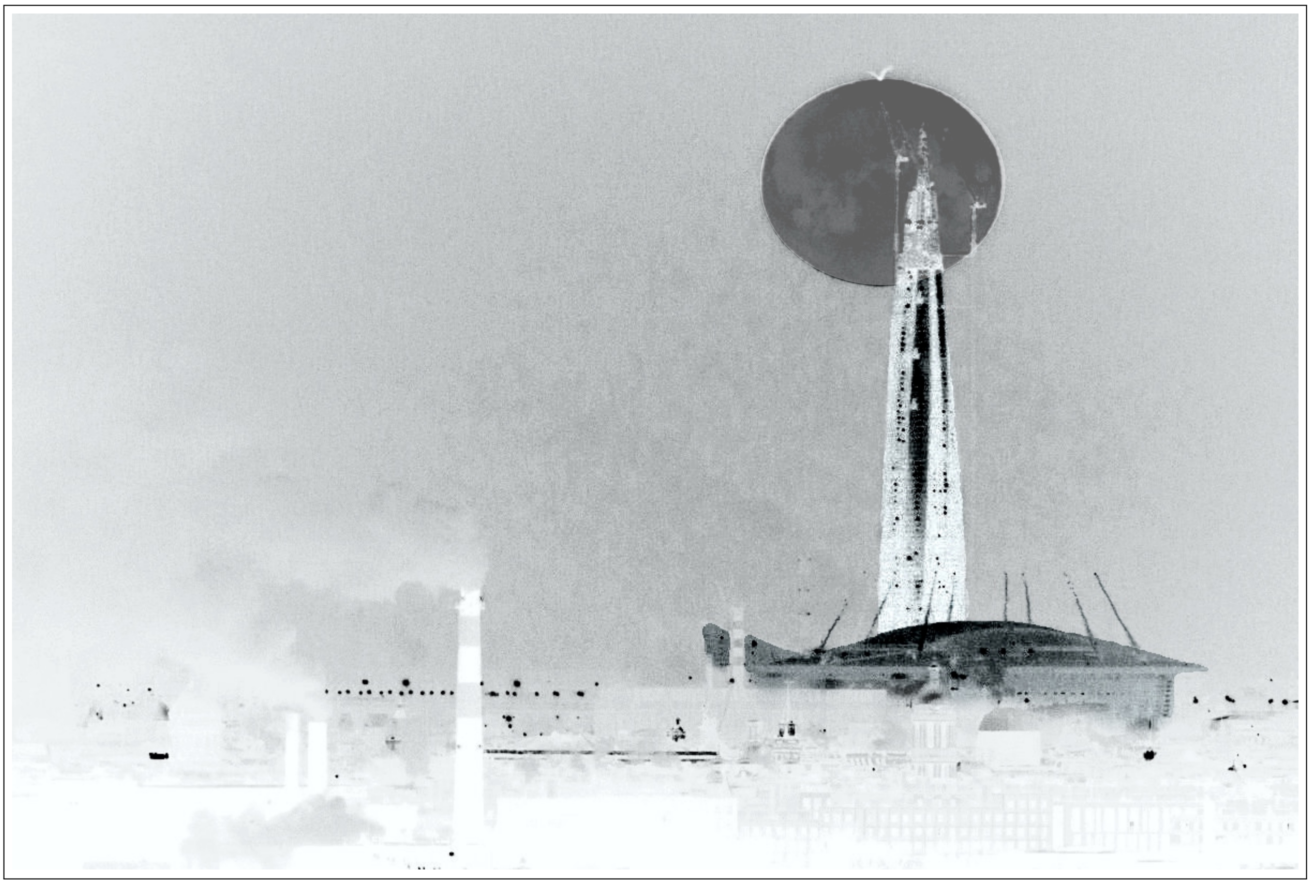
C) Оцените расстояние от «Лахта-центра» до фотографа, если высота небоскреба составляет 462 м.

На отдельном листе дана схема затмения с указанием основных моментов по Всемирному времени и карта некоторой области города с координатной сеткой («Лахта-центр» и «Зенит-Арена» отмечены звездочками).

Задача № 74

Радионаблюдатель из Амстердама (широта $\varphi = 52°$, долгота $\lambda = 5°$, первый часовой пояс) зафиксировал пролет неизвестного спутника в своем небе 12 января 2018 года, причем спутник прошел через зенит, а угол между точками восхода и захода спутника составлял 180°. График интенсивности принятого радиосигнала в зависимости от времени и частоты представлен ниже. Определите:

- большую полуось орбиты спутника;
- эксцентриситет орбиты спутника;



К задаче № 73.

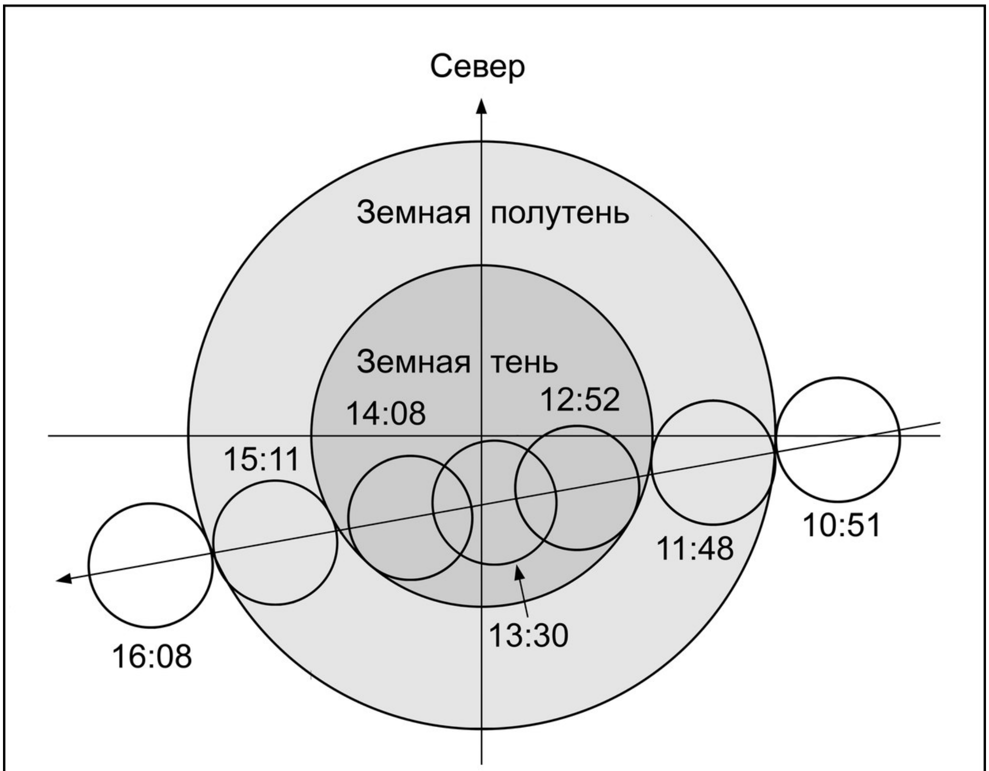
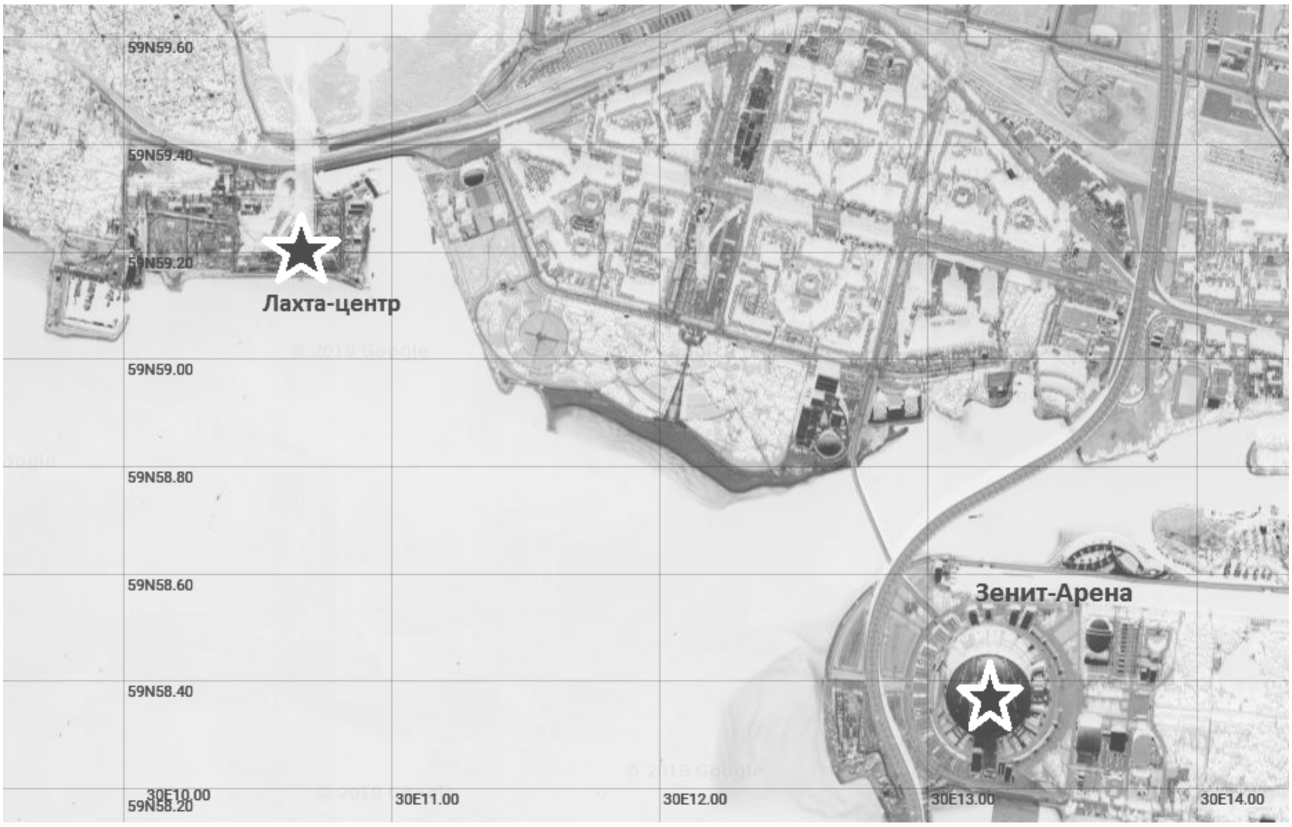
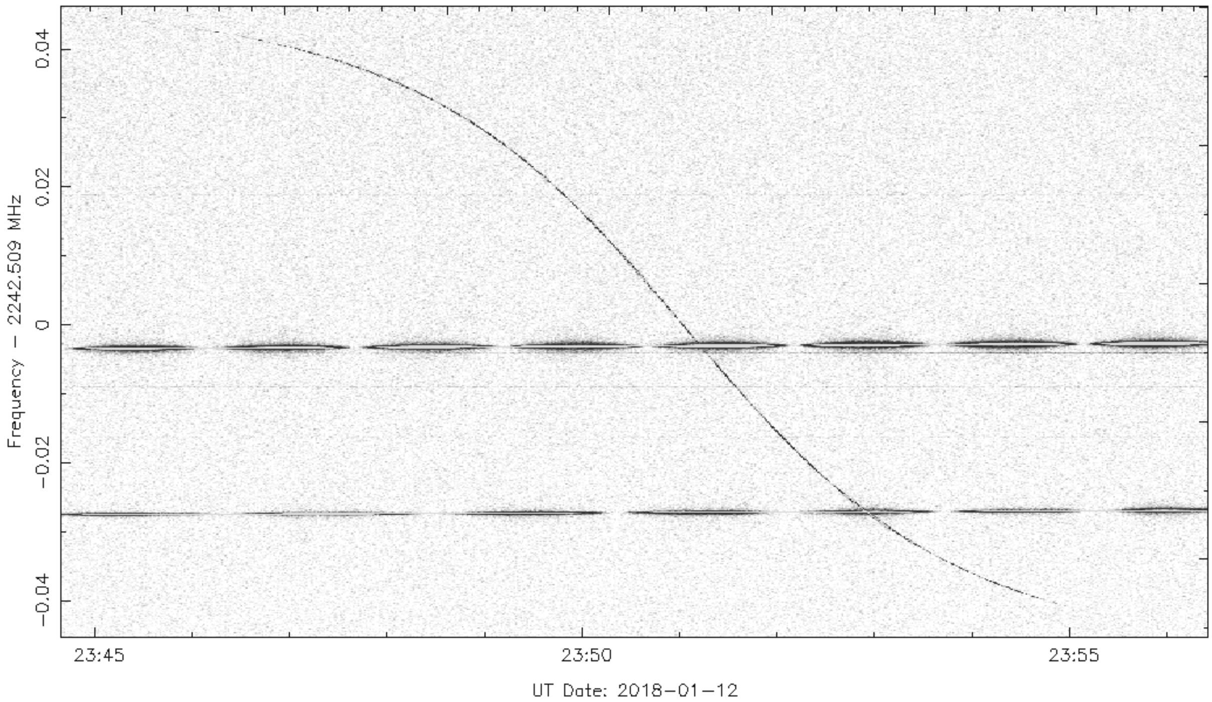


Схема полного лунного затмения 31 января 2018 года



К задаче № 73.



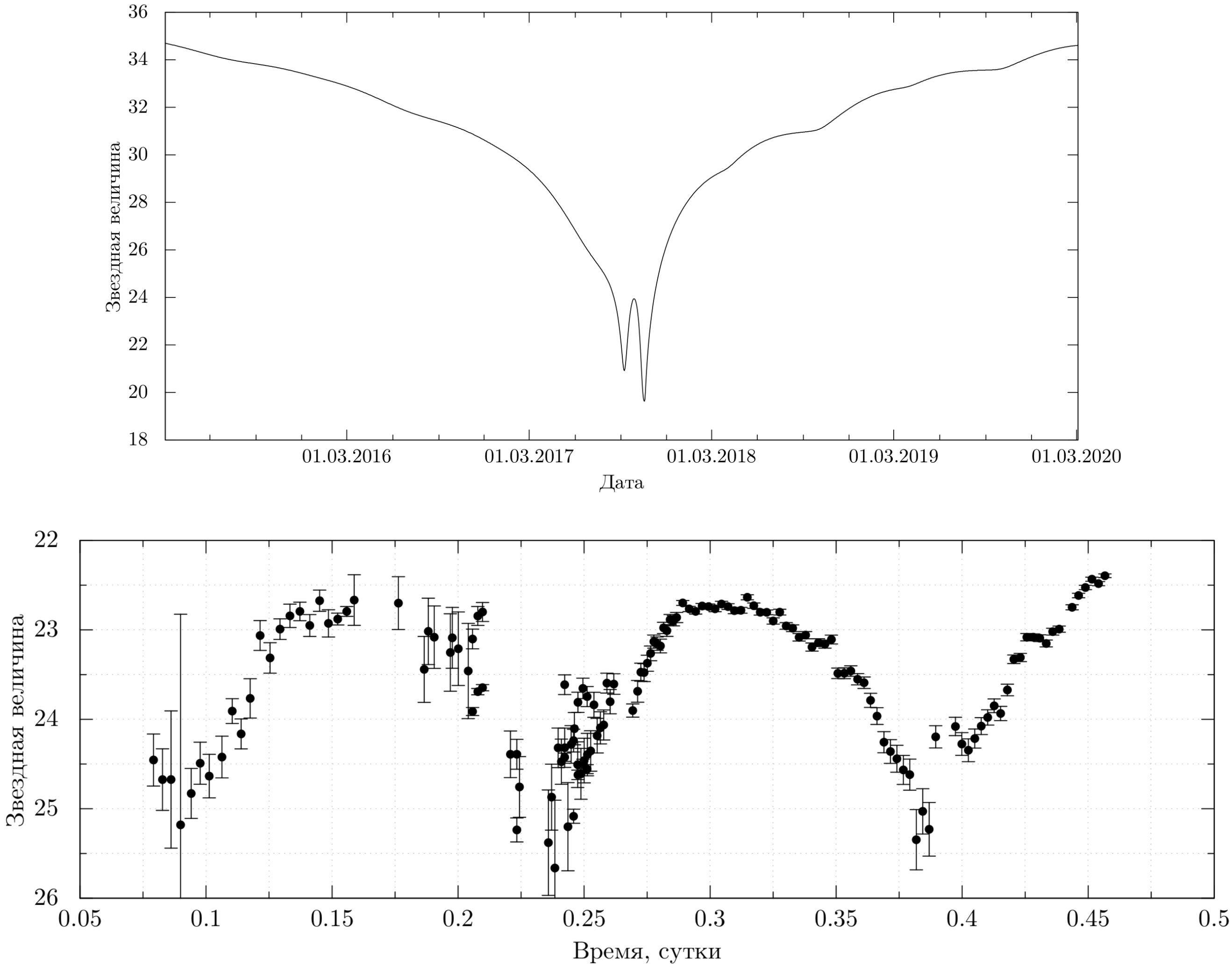
К задаче № 74.

- угол наклона орбиты спутника к земному экватору;
- ближайший момент (по местному гражданскому времени), когда радионаблюдатель мог снова зарегистрировать этот же спутник при помощи своего приемника.

Время (по оси абсцисс) указано в часах и минутах, частота (по оси ординат) — в мегагерцах, причем из частоты вычтена постоянная константа 2242.509 МГц.

Задача № 75

Вам даны кривые блеска некоторого объекта, находящегося в Солнечной системе, полученные при наблюдениях с Земли. По оси ординат на обоих графиках отложена видимая звездная величина в оптическом диапазоне. Из фотометрических наблюдений объекта в системе $u'g'r'i'z$ известны его показатели цвета: $g-r = 0^m.85$, $g-i = 1^m.15$ и $g-z = 1^m.25$. Характерные длины волн полос в этой фотометрической системе равны: для полосы g — 4750 Å, r — 6250 Å, i — 7700 Å, z — 10000 Å. Известно, что в перигелии своей орбиты объект находился на расстоянии 0.25 а.е. от Солнца. Определите все параметры этого объекта и его орбиты, которые Вы сможете получить из приведенных данных.


Звездная величина
Дата
01.03.2016
01.03.2017
01.03.2018
01.03.2019
01.03.2020
Звездная величина
Время, сутки

К задаче № 75.

3 Решения задач

Задача № 1

Найдите в списке лишний объект и объясните, почему он лишний: Лебедь, Рак, Щука, Волк, Журавль.

Решение. Щука — лишняя. Все остальные слова являются названиями созвездий. Хотя надо отметить, что все без исключения перечисленные слова являются именами героев басен И. Крылова.

Задача № 2

Юный астроном вышел задолго до восхода Солнца во двор, чтобы пронаблюдать недавно открытый им метеорный поток ноябрьских α–Пегасид. Сколько метеоров, вылетающих из Квадрата Пегаса (со стороной 15°), увидит юный астроном за два часа наблюдений, если известно, что в час с одного квадратного градуса неба в среднем вылетает 0.02 метеоров?

Решение. Площадь Квадрата Пегаса равна $15^\circ \times 15^\circ = 225$ квадратных градусов. Следовательно, за 2 часа из Квадрата Пегаса следует ожидать $2 \cdot 0.02 \cdot 225 = 9$ метеоров.

Задача № 3

Почему кометы часто летают хвостом вперед, а метеоры — всегда хвостом назад?

Решение. Метеор — это явление в атмосфере, возникающее при сгорании быстро движущихся тел. «Хвост» метеора состоит из разогретого и ионизованного воздуха, а также остатков тела, движущегося в атмосфере, и появляется там, где тело уже пролетело, т.е. позади него.

Хвост кометы — это продукты испарения кометного ядра, которые отбрасываются от Солнца световым давлением. Как следствие, хвост кометы всегда направлен приблизительно в сторону, противоположную направлению на Солнце, и если комета летит от Солнца, то она летит «хвостом вперед».

Задача № 4

23 ноября 1837 года родился голландский физик, лауреат Нобелевской премии Йоханнес Дидерик Ван дер Ваальс. В какой день недели это случилось?

Решение. 23 ноября 2017 года — день, когда проходит тур — четверг. Между днем тура и днем, когда родился Ван дер Ваальс, прошло ровно 180 лет. Каждый год день недели, на который выпадает какая-то определенная календарная дата, смещается на 1 день вперед, если последний февраль перед этой датой был невисокосный, и на 2 дня, если високосный. Таким образом, год, в котором все даты будут приходиться на такие же дни недели, точно наступит через 28 ($4 \cdot 7$) лет от исходного (может и раньше, но нас сейчас интересует максимальный период, т.к 180 — это большое число). $180/28 = 6$ и 12 в остатке, т.е. календарь на 1837 год должен был бы повториться 12 лет назад, т.е. в 2005 году. За 12 лет день недели, соответствующий дате 23 ноября, сместится на 12 дней плюс еще 3 високосных (2008, 2012 и 2016 гг.), т.е. на 15 дней. Надо также помнить, что по используемому нами сейчас и голландцами в XIX веке григорианскому календарю 1900 год високосным не был, т.е. в 1900 году сдвиг произошел только на один день. Таким образом, общее смещение дня недели составит не 15, а только 14 дней, что составляет ровно 2 недели. Таким образом, Ван дер Ваальс родился также в четверг.

Задача № 5

Петербургская школьница Маша как-то вечером вышла на улицу и увидела полную Луну. После этого в Петербурге надолго зарядил дождь. В первый же ясный вечер Маша опять вышла на улицу и увидела Луну, у которой была освещена половина диска. Сколько дней в Петербурге непрерывно шел дождь?

Решение. В полнолуние весь диск Луны освещен Солнцем. После полнолуния часть диска, освещенная Солнцем, начинает убывать справа, и в какой-то момент остается освещенной только левая половина диска — наступает фаза третьей четверти. Освещенная часть продолжает убывать и в некоторый момент диск Луны совсем не освещается Солнцем, тогда говорят, что Луна в новолунии. Затем Солнце снова начинает освещать видимую нам часть диска Луны, на этот раз справа. Когда освещена будет половина диска (правая), наступает фаза первой четверти. Площадь диска, освещенная Солнцем, продолжает увеличиваться и снова наступает полнолуние. Полный цикл смены фаз занимает 29.5 дней. Таким образом, если была освещена левая половина диска, т.е. Луна находилась в третьей четверти, то после полнолуния прошло чуть больше 1 недели, т.е. полных 7 дней. Если же была освещена правая половина, то прошло чуть больше 3 недель, 22 полных дня. Но, т.к как речь идет о Петербурге, не надо забывать, что дождь мог идти и больше месяца (хотя это все же маловероятно), таким образом оба ответа могут быть больше на интервал времени, кратный примерно 2 неделям.

Заметим, что достаточно часто можно встретить утверждение, что Луну в первой четверти можно увидеть только вечером, а в третьей четверти — только утром (что, казалось бы, должно из двух возможных вариантов ответа оставить только один). Однако Петербург находится достаточно близко к полярному кругу, продолжительность темного времени суток в окрестности зимнего солнцестояния существенно превышает 12 часов, поэтому ситуация, когда Луна в третьей четверти видна поздно вечером, вполне реалистична (в последний раз подобное можно было наблюдать примерно 10 ноября в районе 11 часов вечера), а в следующий раз такую Луну можно будет увидеть вечером около 10 декабря (если, конечно, не будет дождя, который в Петербурге бывает даже в декабре).

Задача № 6

В какую сторону и с какой скоростью нужно двигаться марсианину, находящемуся на экваторе Марса, чтобы солнечные сутки для него длились столько же, сколько для неподвижного землянина на Земле? Период обращения Марса вокруг оси — 24 часа 37 минут, радиус Марса — 2.3 тыс. км.

Решение. Солнечные сутки на Земле равны 24 часам. Для Марса 24 часа 37 минут — это звездные сутки, т.е. сидерический период обращения. Как известно, вследствие обращения планеты вокруг Солнца количество солнечных суток на ней в течение года оказывается на 1 меньше, чем звездных, поскольку планета, делая полный оборот вокруг Солнца, дополнительно еще один раз оборачивается вокруг своей оси относительно звезд (исключением является Венера, направление вращения которой вокруг оси противоположно направлению обращения вокруг Солнца). Звездные сутки на Земле на 4 минуты короче солнечных. Год на Марсе примерно в 2 раза длиннее, чем год на Земле, так что марсианские звездные сутки примерно на $4/2 = 2$ минуты короче марсианских солнечных. Следовательно, солнечные сутки на Марсе составляют 24 часа 39 минут.

Разность между длительностью солнечных суток на Земле и на Марсе составляет 39 минут (на Марсе сутки длиннее). 39 минут — это $39/(24 \cdot 60 + 39) \approx$ ≈ 0.026 солнечных суток Марса. Следовательно, чтобы компенсировать разницу между длиной суток на Земле и Марсе, надо за марсианские сутки преодолеть расстояние, равное 0.026 длины экватора Марса. Радиус Марса $R_{\male} = 2300\,\text{км}$. Расстояние, которое надо преодолеть, $L = 2300 \cdot 2 \cdot 3.14 \cdot 0.026 = 382\,\text{км}$. Отсюда находим скорость $v = L/(24 + 39/60) \approx 15\,\text{км/ч}$.

Т.к. земные сутки короче марсианских, то марсианские надо немного уменьшить, т.е. двигаться навстречу Солнцу (на восток).

Отметим, что в условии задачи появилась незапланированная опечатка (радиус реального Марса больше на тысячу км), что, правда, никак не меняет идею решения задачи, авторское решение задачи (и численный результат) даны с учетом опечатки.

Задача № 7

В Санкт-Петербурге полная Луна видна в полночь на высоте 30°. Оцените ее высоту в полночь через две недели.

Решение. За две недели Луна пройдет примерно половину своей орбиты и окажется (по отношению к звездам) в диаметрально противоположной точке неба. Но за те же две недели Солнце по отношению ко звездам сдвинется сравнительно немного (менее чем на 15°), соответственно, в полночь через две недели положение небесной сферы относительно Земли будет примерно тем же самым. Поэтому высота Луны будет примерно такой же по модулю, но отрицательной, т.е. $h \approx -30°$.

Задача № 8

Туманность «Кошачья Лапа» (NGC 6334) имеет видимые размеры $40' \times 20'$ и расположена на расстоянии 1700 пк от Солнца. Во сколько раз по линейным размерам данная туманность превышает линейные размеры лапки кошки (считая их равными 3 см)?

Решение. По определению парсека с расстояния в 1 пк астрономическая единица видна под углом $1''$. Поскольку максимальный размер туманности составляет $40' = 2400''$, а находится она на расстоянии 1700 пк, то ее линейные размеры составляют $2400 \times 1700 \approx 4 \cdot 10^6$ а.е. Одна астрономическая единица (радиус орбиты Земли) — это $1.5 \cdot 10^{11}$ м, поэтому линейные размеры туманности $6 \cdot 10^{17}$ м. Размер лапки кошки в метрах равен $3 \cdot 10^{-2}$, поэтому отношение размеров равно $2 \cdot 10^{19}$.

Задача № 9

Туманность NGC 6334 из предыдущей задачи была открыта английским астрономом Джоном Гершелем 7 июня 1837 года. В какой день недели это произошло?

Решение. 23 ноября 2017 года — день, когда проходит тур — четверг. Удобнее сначала рассчитать, каким днем недели было 23 ноября 1837 года. Между днем тура и 23 ноября 1837 года прошло ровно 180 лет. Каждый год день недели, на который выпадает какая-то определенная календарная дата, смещается на 1 день вперед, если февраль, предшествующий этой дате, был невисокосный, и на 2 дня, если високосный. Таким образом год, в котором все даты будут приходиться на такие же дни недели, точно наступит через $4 \times 7 = 28$ лет от исходного (может и раньше, но нас сейчас интересует максимальный период, т.к. 180 — это большое число). $180/28 = 6$ и 12 в остатке, т.е. календарь на 1837 год должен был бы повториться 12 лет назад, т.е. в 2005 году. За 12 лет день недели, соответствующий дате 23 ноября, сместится на 12 дней плюс еще 3 високосных (2008, 2012 и 2016 гг.), т.е. на 15 дней. Но надо помнить, что по используемому нами сейчас и голландцами в XIX веке григорианскому календарю 1900 год високосным не был, т.е. в 1900 году сдвиг произошел только на один день недели. Таким образом, общее смещение дня недели составит не 15, а только 14 дней, что равно ровно 2 неделям. Таким образом, 23 ноября 1837 — также четверг.

Между 7 июня и 23 ноября $23 + 31 + 30 + 31 + 31 + (30 - 7) = 169$ дней — это 24 недели и еще 1 день. Следовательно, день недели сместился на 1 день назад (т.к. мы отсчитываем от ноября к июлю) и это среда.

Задача № 10

Около звезды Проксимы Центавра недавно обнаружена планета. Как Вы думаете, какой примерно по яркости (самой яркой, т. е. первой, пятой, сотой и т. п.) звездой на ночном небе этой планеты является Солнце? Обоснуйте свой ответ.

Решение. Проксима Центавра находится рядом с двойной звездой α Центавра (обычно считается, что все три звезды образуют тройную систему, хотя есть и точка зрения, что Проксима просто случайно сблизилась с двумя другими звездами), причем одна компонента α Центавра (α Cen A) похожа на Солнце, а вторая (α Cen B) несколько тусклее, соответственно, именно они и будут наиболее яркими звездами на ночном небе планеты (когда Проксима под горизонтом).

Далее можно вспомнить, что α Cen — третья по яркости звезда на ночном небе Земли. Поскольку обе звезды α Cen и Проксима — ближайшие к Солнцу звезды, можно предположить, что и на небе планеты у Проксимы Центавра Солнце будет третьей по яркости звездой, но без учета двух ближайших соседей Проксимы (которых у Солнца нет). Соответственно, Солнце окажется примерно пятой по яркости звездой.

Полученную оценку можно попытаться уточнить. Отметим, что если бы на земном небе невооруженным глазом можно было бы увидеть α Cen A отдельно, то эта звезда была бы не третьей, а четвертой, а на третьем месте оказался бы Арктур. Это красный гигант, он находится достаточно далеко от Солнца и, следовательно, на небе планеты у Проксимы будет иметь почти ту же яркость, что и на небе Земли, поэтому может оказаться ярче Солнца. Поэтому итоговый ответ можно сформулировать так: Солнце на ночном небе планеты у Проксимы Центавра будет примерно 5-6 звездой по яркости.

Задача № 11

> «…Но оставим Чуба изливать на досуге свою досаду и возвратимся к кузнецу, потому что уже на дворе, верно, есть час девятый [вечера].
>
> Сначала страшно показалось Вакуле, когда поднялся он от земли на такую высоту, что ничего уже не мог видеть внизу, и пролетел как муха под самым

месяцем так, что если бы не наклонился немного, то зацепил бы его шапкою. . . »

Н.В. Гоголь, «Ночь перед Рождеством»

Какой вид имел месяц, если он находился в верхней кульминации?

Предположим, что в момент пролета «под самым месяцем» последний находился не только в кульминации, но и в зените. Оцените минимально возможное расстояние, которое пришлось преодолеть Вакуле на пути в Петербург.

Решение. Начнем с первой части задачи. Поскольку на дворе девятый час вечера, то до нижней кульминации Солнца осталось около 4 часов и оно находится где-то в западной части неба (хоть и под горизонтом). Месяц в верхней кульминации (но не обязательно в зените). Следовательно, он «молодой» (освещена правая часть диска Луны), а его фаза несколько больше половины (между первой четвертью и полнолунием).

Вторая часть существенно менее реалистична. Поскольку угол наклона орбиты Луны к плоскости эклиптики около 5°, то это означает, что оказаться в зените Луна может только на широтах, не больших $\varepsilon + 5^\circ \approx 28^\circ$ ($\varepsilon \approx 23^\circ$ — угол между небесным экватором и эклиптикой). Следовательно, даже в самом оптимальном случае Вакуле необходимо пролететь дугу земного меридиана длиной $60^\circ - 28^\circ = 32^\circ$. Поскольку длина окружности меридиана составляет 40 тыс. км, минимальное расстояние получается равным $32/360 \cdot 40 \approx 4$ тысячи км.

Задача № 12

Объект Оумуамуа, не принадлежащий Солнечной системе, пролетел мимо Солнца на минимальном расстоянии 0.25 а.е. С какой скоростью он должен был двигаться при этом относительно Солнца?

Решение. Так как известно, что объект не принадлежит Солнечной системе, его скорость должна быть не меньше, чем 2-я космическая (параболическая) V_2 на расстоянии 0.25 а.е. Параболическая скорость связана с круговой, т.е. 1-й космической V_1, следующим образом: $V_2 = \sqrt{2}V_1$. Круговая скорость для орбиты радиусом $r = 0.25$ а.е. определяется как

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}},$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, а G — гравитационная постоянная, и все величины выражены в одной системе единиц. Можно также найти эту скорость из III закона Кеплера $r^3/T^2 = 1$, где r выражено в а.е., а T — в земных годах, тогда $V_1 = 2\pi r/T$ будет выражена в а.е./год. Еще один вариант вычислить скорость V_1 появляется, если известна круговая скорость для орбиты Земли (т.е., собственно, скорость движения Земли по орбите). Тогда можно найти отношение круговой скорости Земли $V_\oplus = 30$ км/с и круговой скорости для расстояния 0.25 а.е. V_1:

$$V_1/V_\oplus = (r/r_\oplus)(r_\oplus/r)^{3/2} = 0.25 \cdot 4^{3/2} = 2$$

Тогда скорость, с которой объект должен был двигаться относительно Солнца, не меньше чем

$$V_2 = 30 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 85\,\text{км/с}.$$

Задача № 13

Уильям Гершель за единицу расстояния в Галактике принял расстояние от Солнца до Сириуса, считая Сириус звездой, подобной Солнцу. Во сколько раз такая единица расстояния меньше настоящего расстояния между данными звездами? Годичный параллакс Сириуса $0''.4$, видимая звездная величина $-1^m.5$.

Решение. Видимая звездная величина m связана с абсолютной звездной величиной M и параллаксом π следующим образом: $M - m = 5\lg\pi + 5$. Если бы Сириус был подобен Солнцу, его абсолютная звездная величина равнялась бы абсолютной звездной величине Солнца, т.е. $M = +5^m$. Тогда, его параллакс был бы равен

$$\pi = 10^{\frac{M-m}{5}-1} = 10^{0.3} \approx 2''$$

Отношение параллаксов равно отношению расстояний, т.к что У. Гершель занизил расстояние между Солнцем и Сириусом примерно в $2/0.4 = 5$ раз.

Задача № 14

Существует легенда, что днем из глубокого колодца невооруженным глазом можно увидеть звезды. А сколько в среднем звезд одновременно можно увидеть из глубокого колодца ночью? Глубина колодца 20 м, диаметр — 1 м.

Решение. Площадь сферы равна 4π стерадиан, или около 42 тысяч кв. градусов, а звезд, видимых невооруженным глазом, на небе около $6 \cdot 10^3$ штук. Тем самым одна такая звезда занимает на небе площадь 7 кв. градусов, т.е. характерное расстояние между двумя соседними звездами около $\sqrt{7} = 2^\circ.6$.

При наблюдении со дна глубокого колодца видна область неба, поперечник которой составляет примерно 1/20 радиана, т.е. несколько менее 3°. Сравнивая этот результат с предыдущим можно сразу заметить, что в среднем со дна колодца можно будет увидеть одну звезду.

Поскольку в основном видимые невооруженным глазом звезды достаточно слабые, то можно отметить, что при неидеальном зрении, наличии засветки и прочих мешающих факторах с большой вероятностью даже эту одну звезду увидеть со дна колодца не получится. Даже ночью.

Задача № 15

Обитатели третьей планеты в системе Медузы наблюдают вторую планету в этой же системе. Максимальная элонгация второй планеты составляет 30°. Все планеты в системе движутся по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости. Как часто жители третьей планеты будут наблюдать прохождение второй планеты по диску Медузы?

Решение. Примем радиус орбиты третьей планеты за 1. Тогда r — радиус орбиты второй планеты в единицах радиуса орбиты третьей планеты. Если максимальная элонгация второй планеты при наблюдении с третьей равна 30°, то $r = \sin 30° = 0.5$. По III закону Кеплера период обращения второй планеты в единицах периода обращения первой равен $T = r^{3/2}$. Синодический период

$$S = \frac{T}{1-T} = \frac{0.5^{3/2}}{1-0.5^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{0.5^{3/2}}-1} = \frac{1}{2^{3/2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}-1} \approx \frac{1}{2.8-1} \approx 0.55.$$

в годах третьей планеты.

Отметим, что это решение неявно предполагает, что планеты обращаются вокруг Медузы в одну сторону. Однако из-за особенностей образования планетных систем ситуация, когда в планетной системе с круговыми орбитами, лежащими в одной плоскости, планеты обращаются в разные стороны, практически невозможна, т.к что такой вариант и соответствующий ему ответ, хотя его и можно получить аналогичным образом, нереалистичны.

Задача № 16

Пульсар — это нейтронная звезда, которая очень быстро вращается. Ее масса равна $1.4\,\mathfrak{M}_\odot$ (1.4 массы Солнца), радиус 10 км. Какой может быть максимально возможная линейная скорость точки на экваторе пульсара?

Решение. Для того, чтобы вещество, находящееся на экваторе, не улетело от звезды, необходимо, чтобы его скорость не превышала первую космическую скорость для нейтронной звезды. Она и будет искомой скоростью.

Запишем выражение для первой космической скорости $v = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}}{R}}$, где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}$ — масса нейтронной звезды, R — ее радиус. Вспомнив, что $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг (или вычислив $G\mathfrak{M}_\odot$ по радиусу земной орбиты и продолжительности года), получим, что $v \approx 10^8$ м/с.

Задача № 17

На каком расстоянии от Бетельгейзе должна находиться планета, движущаяся вокруг звезды по круговой орбите, чтобы получать такое же количество света в единицу времени, что и Земля? Абсолютные звездные величины Бетельгейзе и Солнца равны -5^m и $+5^m$ соответственно. Определите продолжительность года на такой планете и выразите ее в земных годах, если известно, что масса Бетельгейзе $\mathfrak{M}_{\text{Б}} = 15\,\mathfrak{M}_{\odot}$.

Решение. Поскольку изменение абсолютной звездной величины на 5^m соответствует изменению светимости на два порядка, светимость Бетельгейзе в 10^4 раз больше светимости Солнца. Освещенность E, создаваемая звездой светимости L на расстоянии r, может быть записана как

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

откуда видно, что расстояние от Бетельгейзе до планеты должно быть в 10^2 раз больше расстояния от Солнца до Земли, т.е. $r = 10^2$ а.е.

Воспользуемся III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}_{\text{Б}}},$$

где P — орбитальный период планеты, G — гравитационная постоянная, причем для простоты выразим массу звезды в массах Солнца, период — в годах (земных), а радиус орбиты — в а.е. В такой системе единиц $G = 4\pi^2$, поэтому

$$P = \sqrt{\frac{(10^2)^3}{15}} \approx \frac{10^3}{4} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ лет.}$$

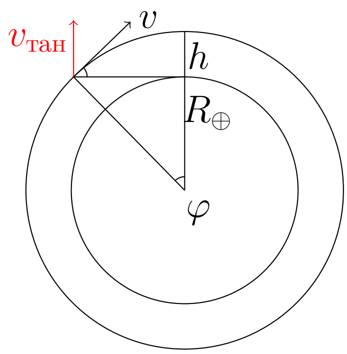
Задача № 18

Искусственный спутник Земли летает по круговой орбите высотой 600 км в плоскости земного экватора. На экваторе в пункте наблюдения установлена неподвижная камера, поле зрения которой составляет $2.6^\circ \times 2.6^\circ$. Оцените максимальный промежуток времени, в течение которого камера сможет непрерывно наблюдать спутник.

Решение. Заметим, что радиус орбиты спутника всего на 10% превышает радиус Земли, поэтому скорость движения спутника по орбите не слишком сильно отличается от первой космической скорости на поверхности Земли $v \approx 8$ км/с (более точный расчет даст 7.6 км/с). По той же причине для оценки можно пренебречь вращением Земли вокруг своей оси — оно существенно медленнее, поэтому скорость спутника относительно поверхности Земли в любом случае близка к скорости его орбитального движения.

Поскольку нас интересует максимальный возможный промежуток непрерывного наблюдения, зададимся вопросом: в каком месте неба угловая скорость спутника будет наименьшей? Очевидно, что если мы найдем эту наименьшую возможную скорость и разделим на нее размер поля камеры, мы получим искомую оценку.

Для того, чтобы угловая скорость была минимальной, нужно, чтобы угол между направлением на спутник и вектором его скорости был как можно меньше (в таком случае тангенциальная компонента скорости также будет меньше), а также чтобы расстояние до спутника было максимальным. Нарисовав рисунок, легко можно увидеть, что оба условия будут выполнены тогда, когда спутник для камеры находится на горизонте.



В этом случае расстояние между спутником и камерой будет равным $l = R_\oplus \operatorname{tg}\varphi$, а тангенциальная скорость $v_{\text{тан}} = v \sin\varphi$, причем $\cos\varphi = R_\oplus/(R_\oplus + h)$. Тут $R_\oplus$ — радиус Земли, а h — высота орбиты спутника.

Тогда угловая скорость движения спутника на горизонте составит

$$\omega = \frac{v_{\text{тан}}}{l} = \frac{v\sin\varphi}{R_\oplus \operatorname{tg}\varphi} = \frac{v}{R_\oplus}\cos\varphi = \frac{v}{R_\oplus + h}.$$

Вычисляя ее, получаем, что $\omega \approx 8/7 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$ $\approx 0^\circ.066$/с. Поскольку камеру можно установить так, чтобы часть траектории, доступная наблюдению, пролегала по диагонали поля зрения, угловое расстояние, на котором камера может следить за спутником, составляет $\sqrt{2} \cdot 2^\circ.6 \approx 3^\circ.7$. В итоге получаем, что возможное время наблюдения составляет примерно 56 секунд, т.е. около 1 минуты.

Задача № 19

В древнем Египте в элитные войска фараона набирали юношей, которые могли различить звезды Мицар и Алькор. Человек с неострым зрением видит эти звезды как одну. Какую звездную величину для такого человека будет иметь такая «сдвоенная» звезда, если видимая звездная величина Алькора равна $+4^m$, абсолютная звездная величина Мицара равна $+0^m.3$, а его параллакс равен $0''.04$.

Решение. Сначала определим видимую звездную величину Мицара.

$$m = M - 5 + 5\lg r = M - 5 - 5\lg \pi,$$

где r — расстояние до звезды в парсеках, π — параллакс звезды в секундах, M — ее абсолютная звездная величина. Тогда видимая звездная величина Мицара $m_M = 0.3 - 5 - 5\lg(4 \cdot 10^{-2}) \approx 2^m.3$.

Пусть m_A — видимая звездная величина и Алькора, m_0 — видимая звездная величина их как целого. По формуле Погсона (E с индексами обозначены освещенности, создаваемые соответствующими звездами):

$$m_A - m_M = 2.5\lg\left(\frac{E_M}{E_A}\right)$$

и

$$\frac{E_M}{E_A} = 10^{0.4(m_A - m_M)} = 10^{0.4(4-2.3)} = 10^{0.68} \approx 10^{2/3} = 100^{1/3} \approx 4.8$$

$$m_A - m_0 = 2.5\lg\left(\frac{E_0}{E_A}\right) = 2.5\lg\left(1 + \frac{E_M}{E_A}\right) = 2.5\lg(1+4.8) \approx 2.5\lg 6 \approx 2$$

откуда $m_0 \approx 2^m$.

Задача № 20

Величина высоты верхней кульминации звезды, наблюдающейся в северном полушарии, совпадает с величиной зенитного расстояния этой же звезды в нижней кульминации. Определить широту наблюдения и склонение звезды. Рефракцию не учитывать.

Решение. Если верхняя кульминация происходит к югу от зенита, то:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta,$$

$$z = 180^\circ - \varphi - \delta,$$

где h — высота в верхней кульминации, z — зенитное расстояние в нижней кульминации, φ — широта места наблюдения, δ — склонение звезды. Очевидно, $\delta = 45^\circ$, а широта наблюдения не играет роли. Т.о. подойдут все звезды, которые кульминируют к югу от зенита, т.е. $90^\circ - \varphi + \delta < 90^\circ \Rightarrow \varphi > 45^\circ$.

Если верхняя кульминация к северу от зенита, то:

$$h = 90^\circ + \varphi - \delta$$

$$z = 180^\circ - \varphi - \delta$$

Значит, широта $\varphi = 45^\circ$, и это подойдет для любой звезды, которая кульминирует к северу от зенита: $90 + \varphi - \delta < 90^\circ \Rightarrow \delta > 45^\circ$.

Задача № 21

На небе видна Луна в третьей четверти. Известно, что в ближайшее время ожидается лунное затмение. Через какое время оно произойдет? Поясните свой ответ.

Решение. Лунные затмения бывают тогда, когда Луна находится в фазе полнолуния. Полный цикл смены фаз Луны проходит примерно за месяц (точнее за 29.5 суток). Если в некоторый момент Луна находится в третьей четверти, то предыдущее полнолуние было неделю назад, а, следовательно, ближайшее следующее полнолуние наступит через 3 недели. Т.е. затмение состоится через 3 недели. Такой точности ответа достаточно.

Задача № 22

Радиотелескоп РТ-32 обсерватории «Светлое» Института прикладной астрономии РАН в Санкт-Петербурге каждый день наблюдений накапливает 1 терабайт (10^{12} байт) информации. С какой минимальной скоростью необходимо передавать эту информацию в центр обработки данных института, чтобы обработка данных не отставала от наблюдений?

Решение. Так как каждые сутки поступает 10^{12} байт, то для непрерывной работы всей системы необходимо передавать всю эту информацию не медленнее, чем за одни сутки. Для этого необходимо, чтобы канал передачи данных позволял это делать. Т.к. в сутках $24 \cdot 3600 = 86400\,\text{с}$, значит за $1\,\text{с}$ должно передаваться $10^{12}/86400 \approx 1.157 \cdot 10^7\,\text{байт/с}$. Поскольку скорость передачи данных обычно измеряется в битах в секунду, то в этих единицах полученное число еще увеличивается в 8 раз, т.е. составляет $9 \cdot 10^7\,\text{бит/с}$. Это порядка $100\,\text{Мбит/с}$. Участник может выразить ответ как в байтах/с, т.к и в битах/с.

Задача № 23

Почему трассы космических кораблей проходят, как правило, с запада на восток?

Решение. Для вывода спутника на орбиту ему необходимо придать первую космическую скорость. Ее сообщает ракета-носитель. Известно, что Земля вращается против часовой стрелки (если смотреть с Северного полюса). Если производить запуск ракеты в направлении вращения Земли, то окончательная скорость космического аппарата сложится из скорости ракеты, относительно поверхности Земли и скорости точки на поверхности Земли, с которой осуществлялся старт. Для точек на экваторе она составляет примерно 500 м/с. Таким образом, КА получают дополнительное приращение скорости за счет вращения Земли.

Задача № 24

Известно, что Луна в своем движении по небу иногда заходит в созвездие Ориона. А бывают ли солнечные затмения, когда Луна в Орионе? Объясните свой ответ.

Решение. Для того, чтобы произошло солнечное затмение, Луна и Солнце должны находиться на одной линии при наблюдении с Земли. Таким образом, чтобы произошло солнечное затмение, когда Луна в Орионе, нужно, чтобы Солнце также находилось в Орионе, чего никогда не бывает. Следовательно, ответ — нет.

Задача № 25

Оцените свой возраст в галактических секундах. Будем считать, что галактический год разделен на 365 галактических дней по 24 галактических часа. Час же разделен на 60 минут по 60 секунд.

Решение. Солнце движется вокруг центра Галактики, совершая один оборот примерно за 220 миллионов лет. Таким образом, 365 галактических суток равны 220 млн земных лет. В году $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3.2 \cdot 10^7$ секунд. Тогда продолжительность галактической секунды равна $2.2 \cdot 10^8/(3.2 \cdot 10^7) \approx 7$ лет. Таким образом, в среднем возраст участников олимпиады из 5-6 класса составляет несколько менее 2 галактических секунд.

Задача № 26

29 января наблюдатель на экваторе в пункте с долготой 30° в.д. наблюдал полную Луну в зените. Его коллега в пункте с долготой 60° з.д. наблюдал в это же время Марс в зените. В каком созвездии находится Марс в этот момент?

Решение. В том случае, если считать данные в задаче условия идеально точными, ответ оказывается парадоксальным — описанная ситуация невозможна. В самом деле, полная Луна (кстати, в этом случае должно наблюдаться лунное затмение) находится в точке неба, диаметрально противоположной Солнцу, и это означает, что Солнце в указанный момент находится в надире. Однако если на экваторе Солнце находится в надире, то оно в этот момент пересекает небесный экватор и, следовательно, происходит равноденствие, либо весеннее, либо осеннее (которые в любом случае не происходят 29 января).

Если же считать описание приближенным (как оказалось в результате проверки, подавляющее большинство участников основную деталь задачи не заметило), то возможны два варианта: либо Луна не в точности полная, либо она не совсем в зените. Первое предположение не позволяет дать сколько-нибудь однозначный ответ на вопрос задачи, а из второго следует, что Луна находится в кульминации.

Расстояние по долготе между пунктами составляет $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. В момент наблюдения угол между Луной и Марсом также составляет около 90°, этому же значению примерно равен угол между направлением на Солнце и на Марс, поскольку Солнце и Луна в момент полнолуния находятся в приблизительно противоположных точках небесной сферы. Марс, находящийся на эклиптике, расположен в пределах созвездия, в котором Солнце окажется через четверть года с 29 января. 29 января Солнце находится в Козероге, через 3 месяца оно будет в созвездии Овна.

Следует заметить, что никаких ограничений на наблюдение Марса в зените (у другого наблюдателя) нет, поскольку широта этого наблюдателя, в отличие от наблюдавшего Луну, неизвестна, поэтому делать вывод, что Марс находится на небесном экваторе (т.е. в районе точек равноденствия), нельзя. Отметим также, что участник, вспомнивший «астрологическую» информацию о датах нахождения Солнца в том или ином зодиакальном созвездии, может заменить Козерога на Водолея, а Овна, соответственно, на Тельца.

Задача № 27

При исследовании центра Галактики была получена карта центральной области размером 30×30 пк. Известно, что расстояние до центра Галактики равно 8.3 кпк. Какие угловые размеры (в угловых минутах) имеет данная область?

Решение. По определению парсека с такого расстояния отрезок длиной в одну астрономическую единицу виден под углом в $1''$. Поскольку расстояние в данном случае в 8300 раз больше, то и угол $1''$ будет соответствовать расстоянию 8300 а.е. Так как в одном парсеке примерно 200 000 а.е., то $1''$ на данном расстоянии — это примерно 0.04 парсека. Размер области на карте в $30/0.04 = 750$ раз больше, следовательно, ее угловые размеры должны составлять $750'' = (750/60)' \approx 12'$.

Если Вы умеете выражать углы в радианах, то можете решить задачу и другим способом. Поскольку линейные размеры области малы по сравнению с расстоянием до нее, то угловые размеры стороны области в радианной мере определяются как $\alpha = \dfrac{a}{L}$, где L — расстояние до центра Галактики, l — длина стороны области в линейной мере. $\alpha = \dfrac{30 \text{ пк}}{8.3 \cdot 10^3 \text{ пк}} = 3.6 \cdot 10^{-3}$. В одном радиане примерно $57^\circ.3$ или $57.3 \cdot 60$ угловых минут. Таким образом, искомая величина равна произведению полученного выше результата в радианах на количество угловых минут в радиане $\alpha = 3.6 \cdot 10^{-3} \cdot 57.3 \cdot 60 \approx 12'$. Значит, угловые размеры области равны $12' \times 12'$.

Задача № 28

У какой из двух планет — Марса или Нептуна — больше будет отличаться минимально возможная и максимально возможная яркость при наблюдении с Земли? Почему?

Решение. Так как обе планеты — внешние, то они всегда наблюдаются практически в полной фазе. Таким образом, отличие их яркости будет связано практически только с изменением расстояния от них до Земли от минимально до максимально возможного, причем чем больше отношение расстояний, тем больше разница. Марс находится несколько дальше от Солнца, чем Земля, и максимальное расстояние до него (в соединении) в 4 раза больше минимального (в противостоянии). Нептун, наоборот, находится далеко от Солнца, так что можно считать, что расстояние от него до Земли практически не меняется при движении планет. Следовательно, звездная величина Марса будет довольно сильно меняться при разных его конфигурациях, а звездная величина Нептуна меняться практически не будет.

К этому следует добавить, что Марс, радиус орбиты которого сравним с радиусом орбиты Земли, в отличие от Нептуна, все же показывает заметную смену фаз (минимально возможная фаза Марса равна около 0.85). Учет этого факта только усиливает полученный выше ответ.

Задача № 29

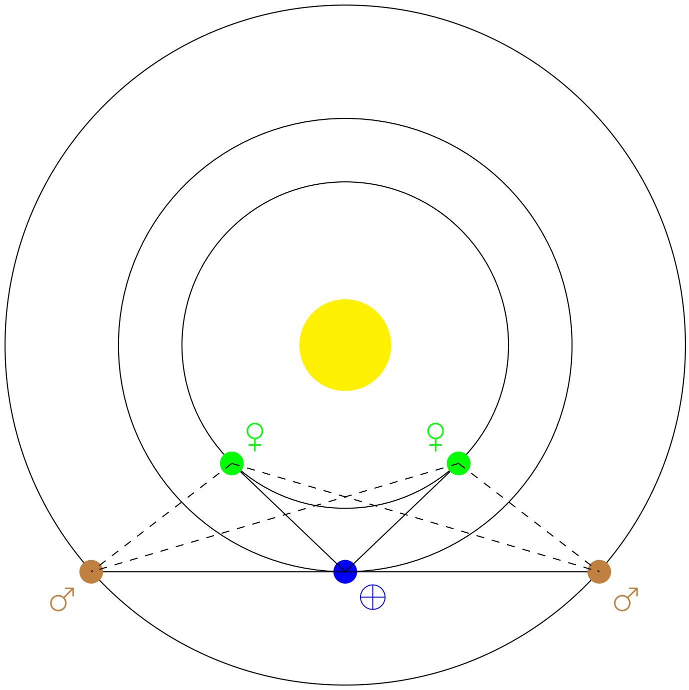
Известно, что Юпитер находится в 5 раз дальше от Солнца, чем Земля, его диаметр в 10 раз больше земного, а сутки на нем длятся 10 земных часов. Представьте, что к поверхности Земли и Юпитера (к экватору) прикрепили концы длинных нерастяжимых веревок, а вторые их концы протянули к Солнцу. В результате вращения планет веревки будут наматываться на планеты. Какая из планет намотает на себя свою веревку быстрее? Юпитер можно считать твердым (т.к. условие задачи сумасшедшее, то будем считать, что твердая поверхность Юпитера также имеет право на существование).

Решение. Длина каждой веревки будет уменьшаться с той же скоростью, с которой будет двигаться точка на экваторе соответствующей планеты. Поскольку известно, что длина окружности пропорциональна ее диаметру, это означает, что скорость наматывания веревки на Юпитер будет в $10 \times (24/10) = 24$ раза больше, чем на Землю. Поскольку при этом Юпитер всего в 5 раз дальше от Солнца, чем Земля, он и намотает свою веревку быстрее (примерно в 5 раз).

Задача № 30

Определите возможные расстояния между Марсом и Венерой, когда Марс находится в квадратуре, а Венера в максимальной элонгации. Орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение. Начать решение следует с выяснения, чему равны радиусы орбит планет (или большие полуоси орбит, которые можно принять равными радиусам, поскольку орбиты по условию можно считать круговыми). Окажется, что у Венеры это 0.72 астрономических единицы, а у Марса — 1.5 а.е. Если Вы знаете теорему Пифагора или даже умеете пользоваться тригонометрией, то можете вычислить ответы, однако существенно проще будет просто построить две орбиты в масштабе с помощью циркуля, выбрать положение Земли (без которого понятия максимальной элонгации и квадратуры теряют смысл) и построить на чертеже искомые отрезки, после чего измерить их длину линейкой.



Как видно из рисунка, у задачи существует два решения (всего возможных взаимных расположений планет четыре, но каждые два из них дают одинаковый результат). Измеряя соответствующие отрезки (на рисунке они изображены пунктиром) линейкой, получаем, что расстояние может равняться либо 1.7 а.е., либо 0.8 а.е.

Задача № 31

На каких широтах полярная ночь представляет собой действительно ночь, т.е. даже в полдень небо достаточно темное и видны звезды, по крайней мере, самые яркие?

Решение. Пока Солнце находится на высотах от $0°$ до примерно $-6°$, продолжаются т.к называемые гражданские сумерки. Конец гражданских сумерек и начало навигационных сумерек происходят при достижении Солнцем высоты $-6°$, в это время начинают быть уверенно видны яркие звезды. Соответственно, требуется найти области, в которых Солнце во время зимнего солнцестояния не поднимается выше $-6°$.

Высота объекта в верхней кульминации (для северного полушария и объекта, кульминирующего к югу от зенита) составляет $h = 90° - \varphi + \delta$, где δ —

склонение объекта, φ — широта места наблюдения. Поскольку в момент зимнего солнцестояния склонение Солнца $\delta = -23^\circ.4$, получаем, что в предельном случае $-6^\circ = 90^\circ - \varphi - 23^\circ.4$. Отсюда , $\varphi \approx 73^\circ$. Учитывая, что в южном полушарии ситуация аналогична, записываем окончательный ответ: $|\varphi| \geqslant 73^\circ$.

Задача № 32

Большая полуось орбиты астероида составляет 1.5 а.е., эксцентриситет равен 0.3, наклон к плоскости эклиптики равен нулю. Найдите отношение максимального и минимального возможных расстояний между астероидом и Землей.

Решение. Найдем перигелийное r_π и афелийное r_α расстояния для астероида. Если a — это большая полуось его орбиты, а e — эксцентриситет, то $r_\pi = a(1-e) = 1.05$ а.е., а $r_\alpha = a(1+e) = 1.95$ а.е. Поскольку астероид движется в плоскости эклиптики, минимум расстояния между ним и Землей будет достигаться тогда, когда астероид находится в перигелии своей орбиты и одновременно в противостоянии, а максимум — когда астероид в афелии и в соединении. Соответственно, отношение максимального и минимального возможных расстояний составляет

$$\frac{r_\alpha + 1}{r_\pi - 1} = \frac{2.95}{0.05} = 59.$$

Еще большим отношение получится, если учесть, что орбита Земли не является круговой. Эксцентриситет орбиты Земли $e_\oplus \approx 0.02$, поэтому перигелийное расстояние Земли составляет $r_{\pi\oplus} = 0.98$ а.е., а афелийное $r_{\alpha\oplus} = 1.02$ а.е. Очевидно, что максимальное расстояние от Земли до астероида в результате учета этой поправки фактически не меняется, а вот минимальное составит $1.05 - 1.02 = 0.03$ а.е., т.е. оно в $5/3$ раза меньше предыдущей оценки, что увеличивает итоговый ответ в те же $5/3$ раза. Получаем, что отношение расстояний составит $90 \div 100$ раз (с большей точностью ответ получать не нужно, да и нельзя — для этого недостаточно точны исходные данные об орбите астероида).

Задача № 33

Вторая «Звезда Смерти», имеющая диаметр 900 км, вышла на круговую орбиту вокруг Земли. Каким мог быть период ее обращения вокруг Земли, если известно, что для наблюдателей на поверхности Земли «Звезда Смерти» иногда полностью затмевала Солнце?

Решение. Для того, чтобы «Звезда Смерти» могла затмить Солнце, необходимо, чтобы ее угловой диаметр для земного наблюдателя хотя бы иногда превосходил угловой диаметр Солнца (который известен и составляет около $30'$).

Рассмотрим предельный случай, когда угловые диаметры совпадают, и найдем, на каком расстоянии от наблюдателя при этом должна находиться «Звезда Смерти».

Поскольку угловой диаметр «Звезды Смерти» достаточно мал, можно считать, что ее линейный диаметр равен расстоянию до нее, умноженному на $30'$, выраженных в радианах. Так как в одном радиане примерно $2{\cdot}10^5$ угловых секунд, то угловой диаметр «Звезды Смерти» в радианах равен $30 \cdot 60/(2 \cdot 10^5) = 9 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, расстояние до нее составляет $900/(9 \cdot 10^{-3}) = 10^5$ км.

Так как радиус Земли существенно меньше ($6.4{\cdot}10^3$ км), то можно считать, что полученная нами величина является максимально возможным радиусом орбиты «Звезды Смерти», тем самым мы пренебрегаем разницей между расстоянием до нее от наблюдателя и от центра Земли. Осталось вычислить период обращения спутника Земли, двигающегося по круговой орбите с данным радиусом. Для этого можно воспользоваться, например, III законом Кеплера или решить задачу о движении спутника по круговой орбите.

Можно также воспользоваться тем, что на Земле периодически происходят полные затмения Солнца Луной, и при этом угловые размеры диска Луны практически совпадают с угловыми размерами диска Солнца. Следовательно, чтобы хотя бы иногда затмевать Солнце, «Звезда Смерти» должна находиться от центра Земли на расстоянии, которое во столько же раз (k) меньше, чем расстояние от Земли до Луны, во сколько раз диаметр станции меньше диаметра Луны (3400 км). Тогда, по III закону Кеплера, период обращения «Звезды Смерти» будет в $k^{3/2}$ меньше периода обращения Луны вокруг Земли, равного 27.3 суток. Таким образом, период обращения станции равен

$$27.3 \cdot \left(\frac{900}{3400}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 3.7 \text{ суток.}$$

Задача № 34

АМС, находящаяся на расстоянии 35 а.е. от Солнца, наблюдает Юпитер в верхнем соединении. Оцените видимую звездную величину Юпитера. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е.

Решение. Поскольку Юпитер находится в верхнем соединении, он расположен на небе рядом с Солнцем и его фаза максимальна (т.е. для АМС он находится почти за Солнцем). Следовательно, расстояние от него до АМС в этот момент составляет $35 + 5 = 40$ а.е. Когда Юпитер наблюдается в противостоянии с Земли, его фаза также максимальна, но расстояние от него до Земли составляет 4 а.е. Условия освещения Юпитера Солнцем в обоих случаях одинаковы, поэтому разница звездных величин при наблюдении с АМС и с Земли будет обусловлена только разницей в расстояниях от них до Юпитера. Поскольку расстояния отличаются в 10 раз, то создаваемые Юпитером освещенности будут отличаться в $10^2 = 100$ раз, а это соответствует разнице на 5^m. При наблюдении с Земли в максимуме блеска Юпитер достигает -3^m, следовательно, для АМС он будет объектом с блеском $+2^m$.

Задача № 35

Предполагается, что в галактике Маркарян 231 в центральной области находятся две сверхмассивные черные дыры с массами 150 миллионов масс Солнца и 4 миллиона масс Солнца. Данные черные дыры обращаются друг вокруг друга с периодом 1.2 года по круговым орбитам. Известно также, что вокруг Солнца обращается транснептуновый объект Седна. Можно ли уместить орбиту Седны между этими двумя черными дырами, если расположить ее в той же плоскости, что и орбиты черных дыр?

Решение. Большую полуось взаимной орбиты двух черных дыр вычислим по III закону Кеплера, сопоставив данную весьма экзотическую систему с Солнечной:

$$\frac{P^2}{a_M^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

где P — период обращения, выраженный в годах, a_M — большая полуось взаимной орбиты, выраженная в астрономических единицах, $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ — сумма масс черных дыр, выраженная в массах Солнца. Подставляя в формулу данные в условии значения, получим величину большой полуоси, равную $a_M \approx 6 \cdot 10^2$ а.е. Поскольку большая полуось взаимной орбиты — это одновременно и среднее расстояние между телами, а черные дыры по условию вращаются друг вокруг друга по круговым орбитам, то тем самым мы получили расстояние между ними.

Данные об орбите Седны необходимо где-либо найти. Воспользуемся, например, Википедией, и выясним, что большая полуось орбиты Седны составляет $a \approx 540$ а.е. Отсюда можно сразу же сделать вывод, что расстояние между перигелием и афелием орбиты Седны (равное удвоенной большой полуоси) больше, чем расстояние между черными дырами в Маркарян 231.

Однако следует вспомнить, что орбиты многих транснептуновых объектов обладают значительными эксцентриситетами. Для Седны это также верно (иначе мы просто не могли бы ее наблюдать), эксцентриситет ее орбиты составляет $e = 0.86$. Поскольку малая полуось эллипса b связана с его большой полуосью a и эксцентриситетом e соотношением $b = a\sqrt{1-e^2}$, получаем, что малая полуось орбиты Седны составляет $b \approx 276$ а.е. и, соответственно, малая ось орбиты будет равна около 550 а.е. Поскольку минимальный диаметр эллипса — это как раз его малая ось, получаем, что если орбиту Седны расположить так, чтобы ее большая ось была почти перпендикулярна прямой, соединяющей черные дыры, то ее удастся уместить между ними.

Задача № 36

Эффективная температура красного гиганта в 2 раза меньше эффективной температуры Солнца. Его радиус составляет 70 радиусов Солнца. Определите абсолютную звездную величину красного гиганта.

Решение. Известно, что светимость звезды L, ее радиус R и эффективная температура T связаны соотношением $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана. Записав это выражение для красного гиганта и для Солнца и разделив одно на другое, получаем

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4.$$

Поскольку абсолютная звездная величина произвольной звезды M связана с ее светимостью как $M = -2.5 \lg L + \mathrm{const}$, то получаем

$$M_* - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L_*}{L_\odot},$$

откуда

$$M_* = M_\odot - 5 \lg \frac{R_*}{R_\odot} - 10 \lg \frac{T_*}{T_\odot}.$$

Подставляя числа и учитывая, что $M_\odot \approx 5^m$, получаем

$$M_* = 5 - 5 \lg 70 - 10 \lg \frac{1}{2} \approx -1^m.$$

Задача № 37

При вспышке сверхновой в виде нейтрино выделилась энергия около 10^{46} Дж. Какую суммарную массу должны иметь тела, состоящие из материи и антиматерии, при аннигиляции которых выделилось бы столько же энергии?

Решение. При полной аннигиляции массы M выделяется энергия $E = Mc^2$, где c — скорость света в вакууме, равная $3 \cdot 10^8$ м/с. Следовательно, искомая масса равна

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{10^{46}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 10^{29} \text{ кг}.$$

Задача № 38

Один крайне наблюдательный астроном заметил следующее:

- высота верхней кульминации некоторой звезды в два раза больше высоты ее нижней кульминации;

- склонение этой звезды в три раза больше широты города, где живет данный астроном.

Найдите склонение звезды, высоты ее кульминаций, а также широту города, где живет астроном.

Решение. Составим две системы уравнений, исходя из условия задачи: одну для случая верхней кульминации к югу (S) от зенита, вторую — к северу (N), как обычно, обозначая φ широту города, δ — склонение звезды, а h (с соответствующими индексами) — высоты в кульминациях:

$$\begin{cases} h_{BKS} = 90° - \varphi + \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90° + \delta \\ h_{BKS} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{BKN} = 90° + \varphi - \delta \\ h_{HK} = \varphi - 90° + \delta \\ h_{BKN} = 2h_{HK} \\ \delta = 3\varphi \end{cases}$$

Решая вторую систему (например, подставляя первое и второе уравнения в третье, а затем учтя четвертое) получим, что $\varphi = 27° \Rightarrow \delta = 81°$. Соответственно, $h_{BKN} = 36°; h_{HK} = 18°$.

Решая первую систему аналогичным способом, получаем $\varphi = 45° \Rightarrow \delta = 135°$, что невозможно.

Осталось не забыть, что южное полушарие ничем не хуже северного, поэтому итоговый ответ таков: широта города $\pm 27°$; склонение звезды $\pm 81°$ (причем знак соответствует знаку широты); высота в верхней кульминации 36°; высота в нижней кульминации 18°.

Задача № 39

Два радиотелескопа РТ-32 Института прикладной астрономии РАН, расположенных в Ленинградской области и в Республике Бурятия, проводят совместные наблюдения в режиме интерферометра на длине волны 13 см. Оцените угловое разрешение такого интерферометра в секундах, если известно, что расстояние между обсерваториями составляет примерно 4300 км.

Решение. Угловое разрешение интерферометра примерно равно тому угловому разрешению, которое имел бы один инструмент, наблюдающий на той же длине волны и имеющий размеры, равные расстоянию между компонентами интерферометра. Следовательно, угловое разрешение (в радианах) $\beta \approx \lambda/D$, где $\lambda = 13$ см, $D = 4300$ км. Поскольку в одном радиане примерно $2 \cdot 10^5$ угловых секунд, итоговый ответ вычисляется как

$$\beta'' = 2 \cdot 10^5 \frac{13}{4.3 \cdot 10^3 \cdot 10^5} \approx 0''.006$$

Задача № 40

15 сентября 2017 года в атмосфере Сатурна сгорела АМС Кассини. В качестве одного из вариантов окончания миссии Кассини-Гюйгенс рассматривался вариант столкновения АМС с Меркурием. Оцените, когда могло бы произойти такое столкновение и с какой относительной скоростью, если траектория полета была бы наименее энергозатратной. За момент отлета от Сатурна принять вышеуказанную дату. Для достижения каких целей можно было бы реализовать этот вариант?

Решение. Наименее энергозатратный перелет между двумя планетами — это движение по эллипсу Гомана, апоцентр которого находится на орбите Сатурна, а перицентр — на орбите Меркурия. Поскольку нас интересует оценка, то орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Тогда, выяснив, что радиус орбиты Сатурна составляет примерно 9.5 а.е., а радиус орбиты Меркурия — около 0.4 а.е., получаем, что большая полуось эллипса Гомана равна $(9.5 + 0.4)/2 \approx 5$ а.е. Воспользовавшись III законом Кеплера и учитывая, что время перелета — это половина периода обращения по такой орбите, получим, что до орбиты Меркурия "Кассини" долетит через $\sqrt{125}/2 = 5.6$ лет, т.е. ориентировочно в марте 2023 года.

Отметим, что для столкновения с Меркурием необходимо, чтобы в этот момент Меркурий находился в точке, диаметрально противоположной (по отношению к Солнцу) к точке старта с орбиты Сатурна, а этого может и не произойти. Как следствие, март 2023 года — это только самый ранний возможный срок столкновения. Возможно, старт с орбиты Сатурна пришлось бы перенести на более позднее время (очевидно, что возможный диапазон моментов старта в такой ситуации примерно совпадает с периодом обращения Меркурия вокруг Солнца, т.е. столкновение произошло бы в марте–июне 2023 года).

Для оценки скорости воспользуемся интегралом энергии:

$$v_C = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot \left(\frac{2}{a_☿} - \frac{1}{a_C} \right)} \approx \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{20/96 \text{ а.е.}}} \approx \sqrt{5} \cdot v_\oplus,$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_\odot$ — масса Солнца, $a_☿$ — радиус орбиты Меркурия, a_C — большая полуось эллипса Гомана, $v_\oplus$ — орбитальная скорость Земли. Вычисляем орбитальную скорость Меркурия (учитывая, что скорость движения по круговой орбите вокруг Солнца обратно пропорциональна корню из радиуса орбиты):

$$v_☿ = v_\oplus / \sqrt{0.4} = \sqrt{2.5} v_\oplus.$$

Поскольку старт с орбиты Сатурна должен был производиться в ту же сторону, в которую вокруг Солнца вращаются планеты (иначе перелет не был бы энергетически выгодным), то "Кассини" будет догонять Меркурий, и относительная скорость столкновения составит

$$\Delta v = (\sqrt{5} - \sqrt{2.5}) \cdot v_\oplus \approx 0.66 \cdot 30 \text{ км/с} = 20 \text{ км/с}.$$

Отметим, что при сближении с Меркурием аппарат будет дополнительно разогнан гравитационным полем самого Меркурия, однако соответствующей поправкой можно пренебречь. Масса Меркурия невелика, вторая космическая скорость для Меркурия составляет всего около 4 км/с, и аккуратный подсчет показывает, что дополнительное увеличение скорости столкновения будет меньше 1 км/с.

Поскольку аппарат достаточно массивный (около 5 тонн), его столкновение с Меркурием на большой скорости должно было бы привести к заметному выбросу вещества с поверхности планеты, которое можно было бы наблюдать и, в частности, проводить спектральные наблюдения. Тем самым такие наблюдения стали бы существенным источником информации о химическом составе и физическом состоянии поверхности Меркурия.

Задача № 41

Советская АМС Луна–10 с 3 апреля по 29 мая 1966 года совершила 460 оборотов вокруг Луны по эллиптической орбите. Определите максимально возможное угловое расстояние между АМС и центром Луны для наблюдателя с Земли, если минимальная высота полета АМС над поверхностью Луны составляла 350 км.

Решение. Луна–10 за 56 суток сделала 460 витков, следовательно, орбитальный период АМС составлял примерно $P = 2.9$ часа. Зная или выяснив где-нибудь массу Луны ($7.3 \cdot 10^{22}$ кг), можно, воспользовавшись III законом Кеплера, определить большую полуось орбиты:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{☾}}.$$

Подставив числовые данные, получаем $a = 2.4 \cdot 10^3$ км.

Зная радиус Луны ($1.7 \cdot 10^3$ км) и высоту АМС над поверхностью Луны в перицентре орбиты, получаем, что перицентрическое расстояние составляло $r_\pi = 2.1 \cdot 10^3$ км. Отсюда, поскольку $r_\pi = a\,(1 - e)$, получаем эксцентриситет орбиты $e = 1/7$ и апоцентрическое расстояние $r_\alpha = a\,(1 + e) = 2.7 \cdot 10^3$ км. Очевидно, что именно оно будет соответствовать максимальному угловому расстоянию (когда прямая, соединяющая апоцентр орбиты и центр Луны, будет перпендикулярна лучу зрения).

Проще всего оценить угловое расстояние, если учесть, что апоцентрическое расстояние примерно в 1.6 раза больше радиуса Луны, а последний при наблюдении с Земли составляет около $15'$. Получаем, что искомое угловое расстояние составляет примерно $24'$. Полученную оценку можно улучшить, если учесть, что за почти два месяца возможных наблюдений Луна должна была проходить через перигей своей орбиты, и тогда для оценки максимального углового расстояния лучше взять максимально возможный угловой радиус Луны (около $17'$). Тогда ответ увеличивается до $27'$.

Задача № 42

Стандартная теория эволюции звезд утверждает, что 4 миллиарда лет назад наше Солнце излучало на 30% меньше энергии, чем сейчас. На основании этих данных оцените среднюю температуру на Земле в тот период, если считать, что орбита Земли и строение ее атмосферы в тот момент были в точности такими же, как сейчас.

Решение. Пусть E — это освещенность, создаваемая сейчас Солнцем на орбите Земли. Поскольку орбита Земли за прошедшее время не изменилась, то 4 миллиарда лет назад освещенность равнялась $E_0 = 0.7E$.

Запишем баланс энергии для Земли в настоящий момент:

$$(1-A)E\pi R_\oplus^2 = K \cdot 4\pi R_\oplus^2 \sigma T^4$$

и 4 миллиарда лет назад:

$$(1-A)E_0\pi R_\oplus^2 = K \cdot 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_0^4,$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли (он за 4 миллиарда лет тоже не изменился), A — отражательная способность (по условию строение атмосферы осталось таким же, следовательно, и отражающая способность практически не поменялась), σ — постоянная Стефана-Больцмана, T и T_0 — средние температуры Земли сейчас и 4 миллиарда лет назад, K — коэффициент, учитывающий существование парникового эффекта.

Тем самым мы предполагаем, что часть теплового излучения Земли задерживается атмосферой и не выходит наружу (это и называется парниковым эффектом), причем доля задерживаемого излучения, равная K $(0 < K < 1)$, примерно постоянна. На самом деле это не идеальная модель парникового эффекта, поскольку распределение энергии в спектре излучения Земли зависит от температуры и относительная доля поглощенного излучения одной и той же атмосферой при разных температурах будет несколько различаться, но в качестве простого приближения ее можно использовать (отметим, что участники могут использовать и какую-либо другую модель — например, считать, что парниковый эффект увеличивает температуру на фиксированную величину).

Разделив два выражения для баланса энергии друг на друга, получим

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \Rightarrow T_0 = T\sqrt[4]{E_0/E} = T\sqrt[4]{0.7} \approx 0.9\,T.$$

Среднюю температуру Земли T можно оценить аналогичным образом, но при этом мы пренебрежем существованием парникового эффекта. Поэтому воспользуемся внешними данными и будем считать ее равной $2.9 \cdot 10^2$ К (без учета парникового эффекта она будет ниже). Следовательно, средняя температура на Земле 4 миллиарда лет назад была примерно $2.6 \cdot 10^2$ К, т.е. около -10°С.

Заметим, что этот результат противоречит палеоклиматическим данным, согласно которым в это время на Земле существовала жидкая вода в больших количествах. Считается, что это можно объяснить более существенным парниковым эффектом.

Задача № 43

15 сентября 2014 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны. Известно, что в результате слияния двух черных дыр в виде гравитационного излучения в течение 0.1 секунды высветилась масса, равная 3 массам Солнца. 17 августа 2017 года были впервые зарегистрированы гравитационные волны от двух слившихся нейтронных звезд. При этом слиянии в виде гравитационного излучения выделилось 0.03 массы Солнца за 100 секунд. Определите разность абсолютных «гравитационных звездных величин» этих событий.

Решение. Средняя «гравитационная светимость» каждого из источников $L_i = m_i c^2/t_i$, где m_i — масса, выделившаяся в виде гравитационного излучения, t_i — время высвечивания, а c — скорость света.

Воспользуемся законом Погсона для абсолютных звездных величин M_i:

$$M_1 - M_2 = -2.5\lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = -2.5\lg\left(\frac{m_1c^2}{t_1}\frac{t_2}{m_2c^2}\right) = -2.5\lg\left(\frac{m_1t_2}{m_2t_1}\right).$$

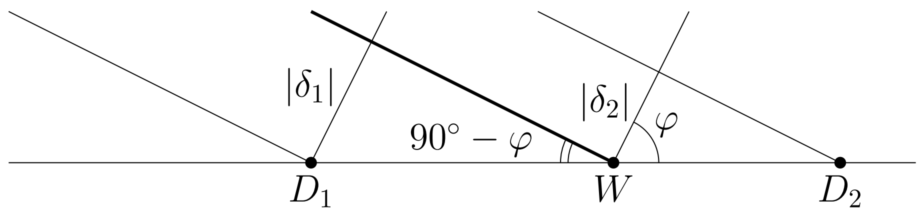
Подставив числовые данные, получаем

$$M_1 - M_2 = -2.5\lg\left(\frac{3\cdot 100}{0.03\cdot 0.1}\right) = -2.5\lg\left(\frac{3\cdot 100}{0.03\cdot 0.1}\right) = -2.5\lg 10^5 = -12^m.5.$$

Задача № 44

Некоторая звезда имеет склонение $\delta_1 = -8°$ и заходит за горизонт в некотором городе в точке с азимутом $A_1 = 74°$. Какой азимут в момент захода будет иметь звезда со склонением $\delta_2 = 6°$ при наблюдении из того же города? Какова широта этого города?

Решение. Так как склонения звезд небольшие, то заход звезд происходит очень близко к точке запада. Можно воспользоваться плоским приближением и нарисовать схему захода обеих звезд в данном городе: горизонтальная линия — математический горизонт, W — точка запада, жирная линия — небесный экватор, две линии, параллельные экватору — суточные параллели обеих звезд, D_1 и D_2 — точки захода звезд:



Здесь φ — широта пункта наблюдения, а длина $|D_1W| = A'_1 = 90^\circ - A_1 = 16^\circ$, так как азимут отсчитывается от точки юга в сторону запада.

Из рисунка очевидно соотношение: $|\delta_1| = A'_1 \cos\varphi$. Тогда косинус широты можно легко найти: $\cos\varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$. Отметим, что ситуация для южного полушария симметрична, поэтому второй ответ формально имеет смысл (см. ниже).

Так как для второй звезды верно аналогичное соотношение, то $|D_2W| = A'_2 = A'_1|\delta_2|/|\delta_1| = 12^\circ$, то есть азимут $A_2 = 90^\circ + A'_2 = 102^\circ$.

Осталось сделать последний шаг. В условии задачи говорится о городе, в котором наблюдается описанная картина. Однако на широте 60° южной широты на Земле нет ни одного города. Поэтому из двух возможных ответов для широты остается только один — $\varphi = +60^\circ$.

Заметим, что задачу можно решить и более «честно», не используя плоское приближение и воспользовавшись формулами сферической тригонометрии. Подобное решение дает тот же результат и, естественно, не является ошибочным, хотя и несколько более трудоемко.

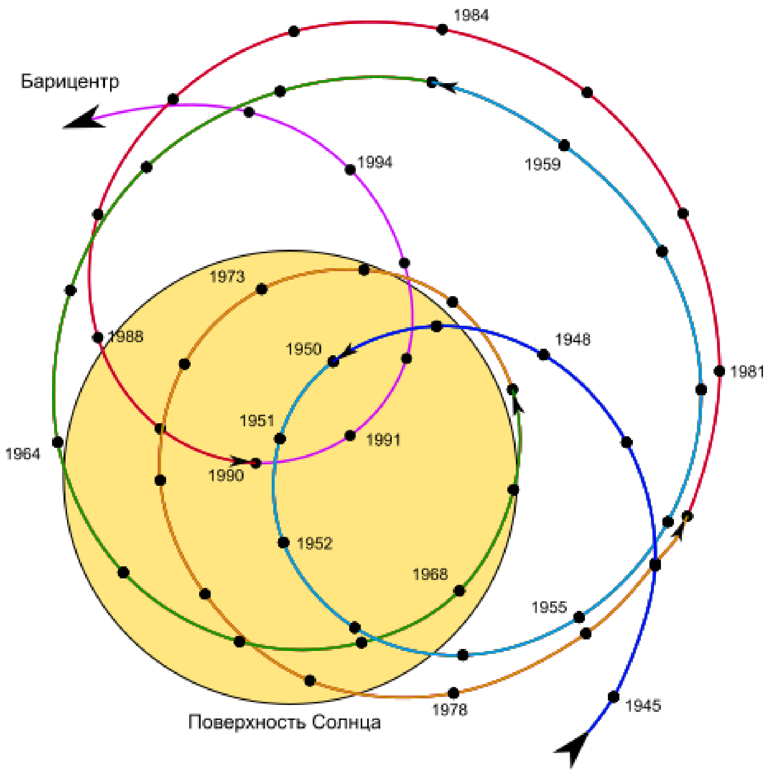
Задача № 45

Пусть инопланетный наблюдатель изучает нашу Солнечную систему из окрестностей звезды χ Dra. Какую планету он откроет первой и каким методом?

Решение. Практически все методы обнаружения внесолнечных планет существенно зависят от угла между лучом зрения и плоскостью орбиты планеты, поэтому в интересущем нас случае результат должен зависеть от положения звезды относительно плоскости эклиптики. Известно, что в созвездии Дракона находится северный полюс эклиптики, т.к что, по-видимому, для наблюдателя плоскости орбит планет Солнечной системы будут фактически перпендикулярны лучу зрения. Поиск данных о звезде действительно показывает, что ее эклиптическая широта составляет $+83^\circ.6$, и это означает, что методы, предполагающие, что луч зрения лежит в плоскости орбиты, в данном случае не сработают.

Таким образом, наблюдать прохождения планет по диску Солнца инопланетный наблюдатель точно не сможет. Изменение лучевой скорости звезды из-за обращения ее вместе с планетами вокруг общего центра масс будет очень малым и практически ненаблюдаемым (можно, например, вспомнить, что внесолнечные планеты даже с массой порядка массы Юпитера, обнаруженные таким методом, все находятся существенно ближе к своей звезде, чем Юпитер). Тем самым два наиболее эффективных метода обнаружения внесолнечных планет неработоспособны.

Движение Солнца вокруг барицентра Солнечной системы можно было бы попытаться обнаружить и астрометрическим методом, однако несложно убедиться, либо сделав соответствующую оценку, либо просто найдя готовый результат вроде нижеприведенного:



что максимальное смещение центра Солнца относительно барицентра Солнечной системы примерно совпадает с диаметром Солнца. Это означает, что его можно было бы обнаружить обычными методами в том случае, если доступное угловое разрешение позволяет разрешить диск Солнца. Поскольку прямые наблюдения диска пока невозможны даже для большей компоненты α Cen, которая похожа на Солнце и является ближайшей (не считая Проксимы Центавра) звездой к Солнцу, то этот вариант исключен.

Однако оценим все-таки требуемую точность угломерных измерений. Расстояние до χ Dra можно разыскать, оно составляет около 8 пк. Поскольку диаметр Солнца составляет около 0.01 а.е., то его угловой размер при наблюдении от интересующей нас звезды окажется около $0''.001$. Прямые наблюдения с таким разрешением невозможны, но тем не менее подобная астрометрическая точность в оптическом диапазоне уже реализуема (хотя подобная возможность и появилась совсем недавно, с запуском космического инструмента "Gaia"). Следовательно, этот метод можно реализовать, однако он явно не будет первым результативным.

Можно вспомнить про метод гравитационного микролинзирования. На самом деле в данной ситуации он принципиально непригоден: расстояние, на котором можно будет наблюдать эффект линзирования, превышает расстояние между

χ Dra и Солнцем, однако исключить его можно, исходя из существенно более простого соображения: для него практически точно между этими звездами должна пролететь еще одна звезда. Поскольку расстояние от нас до χ Dra сравнительно невелико, вероятность подобного события ничтожно мала (и, более того, можно наверняка сказать, что в последние несколько миллионов лет ничего подобного не происходило).

Остается только один вариант — прямые наблюдения. Если делать это в оптическом диапазоне, то наиболее предпочтительными кандидатами будут планеты, которые одновременно и достаточно большие (чтобы быть поярче), и достаточно далекие от Солнца (чтобы их было проще наблюдать рядом с Солнцем).

Начнем с Юпитера. В максимуме блеска при наблюдении с Земли он имеет примерно -3^m (с расстояния около 4 а.е.), однако инопланетному наблюдателю придется наблюдать его с расстояния, в $4 \cdot 10^5$ раз большего. На таком расстоянии блеск Юпитера будет в $(4 \cdot 10^5)^2 = (10^6/2.5)^2 = 10^{12}/(2.5)^2$ раз слабее, т.е. его видимая звездная величина будет больше на 28^m. Надо также учесть, что при максимальном угловом расстоянии Юпитера от Солнца будет видна только половина диска, т.к что в итоге для инопланетного наблюдателя Юпитер станет объектом с видимой звездной величиной примерно $+26^m$. Наблюдать такой объект, тем более рядом с Солнцем, трудно, но все же возможно (на HST), так что этот вариант, по-видимому, предпочтительнее предыдущего. Заметим, что несколько слабее (но при этом дальше от Солнца) будет Сатурн, т.к что, возможно, его удастся обнаружить раньше.

Однако наблюдать можно не только в оптическом диапазоне. Есть еще и радиодиапазон, а в нем (в диапазоне УКВ) Земля существенно ярче Солнца (и, естественно, всех других планет Солнечной системы). Поэтому если инопланетный наблюдатель наблюдает Солнечную систему сейчас, то именно Земля будет обнаружена первой. Однако поскольку это радиоизлучение имеет техногенное происхождение, то еще век назад ситуация была совершенно другой и наиболее эффективным методом были прямые оптические наблюдения.

Задача № 46

Студент-астроном заметил, что несколько дней подряд ложится спать в момент восхода Бетельгейзе (α Ориона) над горизонтом. Раньше или позже он ложится в каждый последующий день? В какое время года ему удается наблюдать восход данной звезды?

Решение. Поскольку Земля вращается вокруг своей оси в том же направлении, в котором обращается вокруг Солнца, период между двумя последовательными прохождениями Солнцем меридиана (полуднями или полуночами) оказывается чуть больше, чем период вращения Земли вокруг своей оси (разница составляет примерно 1/365 часть суток, это около 4 минут). И, поскольку восход Бетельгейзе связан только с вращением Земли вокруг оси, он каждый день по солнечному времени происходит примерно на 4 минуты *раньше* (а студент, соответственно, раньше ложится спать).

Далее следует вспомнить небо. Орион — «зимнее» созвездие, и это значит, что оно оказывается выше всего над горизонтом (кульминирует) в середине ночи зимой. Если предположить, что студент ведет более-менее здоровый образ жизни и ложится спать часов в районе 11 часов вечера (т.е. за два-три часа до истинной полуночи), то это значит, что описанная ситуация происходит поздней осенью или в начале зимы.

Задача № 47

Определите, какие дни недели были 4 февраля 1918 года в Югославии, Болгарии и России, в которых сегодня проходит олимпиада. Примечание: Болгария перешла на григорианский календарь в 1916 году, Югославия — в 1919 году.

Решение. Начнем с наиболее простого случая — григорианский календарь в Болгарии. В этом случае от дня проведения тура прошло ровно 100 лет, причем в соответствующем промежутке не было ни одного года, который являлся бы високосным в юлианском календаре и не являлся бы — в григорианском. Поэтому каждый четвертый год длиннее на одни сутки, а средняя продолжительность года равна точно 365.25 суток. Следовательно, за это время прошло 36525 дней, и мы сможем определить день недели 4 февраля 1918 года, если поделим это число на 7 с остатком. Конечно, можно честно выполнить деление в столбик, но, поскольку нас интересует только остаток, можно упростить себе жизнь, просто откидывая слагаемые, заведомо делящиеся на 7 нацело. $36525 - 35000 = 1525$, $1525 - 1400 = 125$, $125 - 70 = 55$, $55 - 49 = 6$, значит, разница в днях недели равна 6, причем отсчитывать эти дни надо назад от воскресенья, в которое проходил тур. Отсюда делаем вывод: 4 февраля 1918 года в Болгарии — понедельник.

В Югославии (точнее, странах Югославии — так она стала называться только в конце 1918 года) в тот момент действовал юлианский календарь. Разность дат между юлианским и григорианским календарями и в XX, и в XXI веке составляет 13 дней. Таким образом, 4 февраля 1918 года по юлианскому календарю это 17 февраля 1918 года по григорианскому. Так как 4 февраля 1918 года по григорианскому календарю — понедельник, то 17 февраля 1918 года (также по григорианскому календарю) было воскресеньем и, следовательно, в странах Югославии 4 февраля 1918 года — воскресенье.

Казалось бы, поскольку календарей только два, то ответ для России должен совпадать с каким-то из двух предыдущих. Однако три вопроса задачи наводят на мысль, что ответов все-таки тоже три. Это действительно так: кроме вариантов, когда действовал какой-то один из календарей, остается еще вариант перехода с одного календаря на другой. В самом деле, поскольку даты по григорианскому календарю обгоняют даты по юлианскому, в каждой стране, переходившей с первого календаря на второй, какие-то даты должны были просто отсутствовать. В России сразу после 31 января 1918 года наступил день 14 февраля 1918 года и, соответственно, дня 4 февраля 1918 года просто не было.

Примечание. Некоторые участники, полностью решившие задачу, после тура интересовались, насколько корректно было со стороны организаторов олимпиады давать задачу про особенности календаря в России, о которых участники-иностранцы знать скорее всего не могут. Спешим всех успокоить: задача была включена в комплект только после того как мы убедились, что в этой возрастной параллели участников из других стран не будет. С другой стороны, в этом нам немного повезло: упустить случай отметить вековой юбилей смены календаря было бы обидно, второй такой же представился бы еще только через 100 лет, на CXXV Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде.

Задача № 48

У полярника, зимующего неподалеку от Северного полюса, остановились часы. На какой минимальной широте полярник сможет бегать вокруг полюса так, чтобы его часы постоянно показывали точное местное время?

Решение. Чтобы часы полярника всегда показывали точное местное время, он должен пробегать всю параллель за то же время, что и Солнце, т.е. за 24 часа. Так как требуется минимальная широта, то эта параллель будет самой длинной, которую в принципе может пробежать полярник. Таким образом, надо оценить максимальную скорость, с которой полярник может бегать. Пусть она равна 10 км/час, тогда за 24 часа полярник сможет пробежать 240 км. Это и будет длина параллели L с минимальной широтой. Так как параллель маленькая, то можно считать, что она представляет из себя обычный круг на плоскости. Найдем радиус этого круга R, т.е. расстояние от полюса до параллели:

$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{240}{2\pi} \approx 40\,\text{км}.$$

Известно, что 1° меридиана на земной поверхности соответствует 111 км, следовательно, расстояние в градусах от полюса до параллели, по которой бегает полярник, будет равно $40/111 \approx 0.4^\circ$. Таким образом искомая широта будет равна $90^\circ - 0^\circ.4 = 89^\circ.6$ или примерно $89^\circ 40'$.

Примечание. Конкретный ответ в этой задаче, естественно, зависит от предполагаемой скорости бега полярника, так что оценивается не столько ответ, сколько ход решения и рассуждения. Участники могут брать любую разумную скорость полярника (примерно от 5 км/час до 20 км/час), оценка при этом не снижается.

Задача № 49

В изданном 95 лет назад задачнике по астрономии упоминается «Звезда Великой Октябрьской Революции», выбор которой был обусловлен тем, что она видна в лучах заходящего Солнца в день Революции. Что это за звезда? Какого она цвета?

Решение. Для начала придется вспомнить историю (или здравый смысл) и учесть, что Октябрьская революция произошла 7 ноября (если вспоминалась история) или где-то в октябре (если использовался здравый смысл). Дальнейшее чтение условий задачи позволяет сформулировать несколько важных утверждений.

1) Эта звезда очень яркая, скорее всего это одна из ярчайших звезд неба (иначе ее просто не будет видно в лучах заходящего Солнца).

2) Эта звезда находится на небе сравнительно недалеко от Солнца 7 ноября (раз она видна на закатном небе), но все же не очень близко (иначе даже очень яркую звезду увидеть не удастся).

3) Поскольку в течение года Солнце движется по небу в сторону, противоположную суточному движению (см. решение задачи № 1), после 7 ноября Солнце на небе к этой звезде будет приближаться.

4) Если цвет звезды имеет хоть какое-нибудь отношение к революции, то, по-видимому, звезда должна быть красной.

Из второго утверждения следует, что искать надо звезду в созвездиях на эклиптике, причем в тех, в которых Солнце бывает примерно в ноябре. Даже если выбирать созвездия с большим запасом — Весы, Скорпион, Змееносец и Стрелец — сразу же можно заметить, что в них есть ровно одна действительно яркая звезда — Антарес. Остается только убедиться, что он же удовлетворяет и всем другим условиям.

Задача № 50

В одном из фильмов о «людях в черном» у кота по кличке Орион в подвеске к ошейнику была заключена галактика. Если предположить, что радиус подвески равен 1 см, а галактика (является уменьшенной копией нашей) имеет радиус $R = 50$ тысяч световых лет, то во сколько раз больше или меньше протона были бы звезды типа Солнца в таком масштабе? Радиус протона 10^{-13} см.

Решение. Сначала определим, во сколько раз радиус галактики превосходит радиус подвески. Переведем значение R в сантиметры. Данное расстояние свет со скоростью $\approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с проходит за 50 тысяч лет; в одном году примерно $365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3.2 \cdot 10^7$ секунд.

$$50 \cdot 10^3 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 4.8 \cdot 10^{22} \text{ см.}$$

Таким образом, радиус галактики превосходит радиус подвески в $N = 4.8 \cdot 10^{22}$ раз. Тогда в масштабе подвески Солнце имело бы радиус в N раз меньше настоящего:

$$r = \frac{7 \cdot 10^{10}\text{см}}{4.8 \cdot 10^{22}} = 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Таким образом, отношение размеров Солнца в данном масштабе и протона составляет

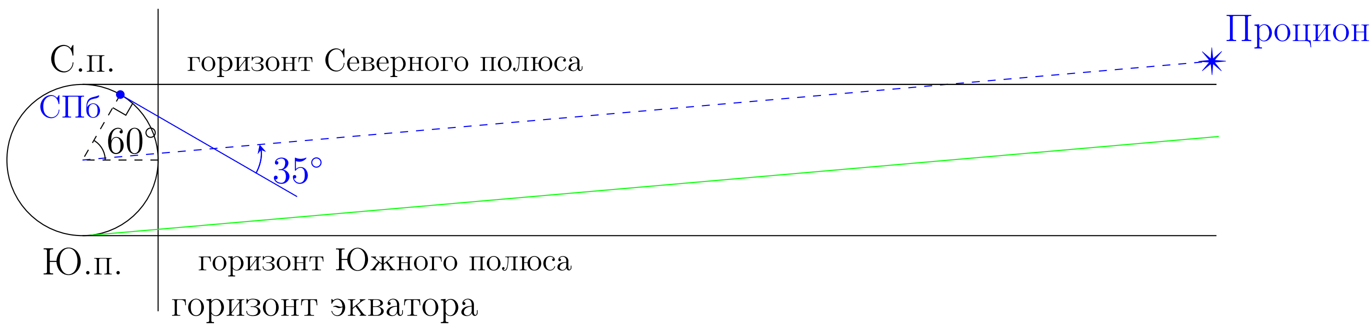
$$\frac{1.5 \cdot 10^{-12}}{10^{-13}} \approx 15.$$

Задача № 51

Максимальная высота над горизонтом звезды Процион для наблюдателя в Санкт-Петербурге составляет 35°. Верно ли утверждение, что везде, где на Земле водится енот-полоскун (*Procyon lotor* на латыни), виден «небесный собрат» енота?

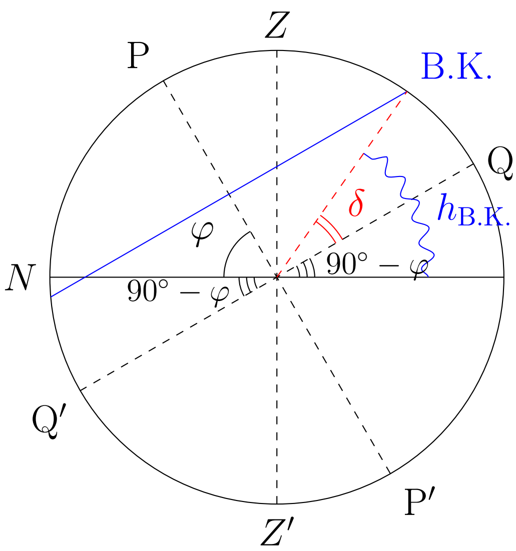
Решение. Основная часть решения состоит в том, чтобы выяснить, в каких местах Земли в принципе можно увидеть Процион. Это можно сделать как минимум двумя способами, один из которых предполагает наличие базовых знаний сферической астрономии, а во втором можно обойтись и без них. Начнем со второго.

Построим чертеж, на котором нарисуем Землю, Санкт-Петербург (СПб) на ней и его горизонт (синяя сплошная линия), а также удаленный (на самом деле на куда большее расстояние, но размеры листа бумаги ограничены) Процион. Видно, что максимальная высота Проциона над горизонтом (или угол между линией горизонта и направлением на Процион) будет в том случае, когда СПб ближе всего к Проциону (именно этот случай и изображен на чертеже).



Поскольку Процион на самом деле находится на намного большем расстоянии, с Земли он будет наблюдаться в направлении, параллельном направлению из центра Земли (на рисунке оно отмечено синей штрихованной линией). Построив несколько таких параллельных прямых, мы обнаружим, что остается только маленькая область в окрестности Южного полюса Земли, в которой Процион не будет виден ни при каком положении Земли (предельная прямая для самой южной широты, на которой Процион еще можно увидеть, изображена на рисунке зеленым). Аккуратный чертеж позволит даже найти нужную широту, но для получения итогового ответа это не обязательно.

Аналогичный вывод можно получить более формальным путем. В момент наибольшей высоты над горизонтом светило находится в верхней кульминации (В.К.). В этот момент высота светила связана с широтой φ и склонением δ по формуле $h = 90^\circ - \varphi + \delta$. Отсюда получаем, что склонение Проциона равно $\delta = h + \varphi - 90^\circ = 5^\circ$. Таким образом, звезда Процион находится в северном полушарии небесной сферы и видна для всех наблюдателей в северном полушарии Земли.



Оценим минимальное значение широты, на которой виден Процион. В этом случае при видимости Проциона на горизонте его высота составит 0°:

$$0^\circ = 90^\circ - |\varphi - \delta|.$$

Отсюда наиболее южная широта видимости Проциона составляет 85° ю.ш. (и, как видим, это действительно довольно близко к Южному полюсу). Таким образом, Процион нельзя увидеть в круге радиусом 5° (или $500 \div 600$ км) вокруг Южного полюса.

Осталось ответить на основной вопрос задачи. Даже при весьма скромных познаниях в биологии несложно вспомнить, что территория 85° ю.ш. и южнее — это самый центр Антарктиды, где не водятся не только еноты, но даже пингвины с тюленями. Следовательно, везде, где водится енот-полоскун (а он на самом деле живет только в Северном полушарии Земли), он может по ночам любоваться одноименной звездой.

Задача № 52

С какой пространственной скоростью геостационарный спутник движется относительно точки экватора, над которой находится? Геостационарным спутником называется спутник, вращающийся вокруг Земли в плоскости экватора таким образом, что он постоянно находится над одной и той же точкой экватора (на высоте 36 тыс. км над ней).

Решение. То, что спутник постоянно находится над одной точкой экватора, означает, что он совершает полный оборот вокруг Земли за то же время, за которое точка на экваторе Земли совершает полный оборот, т.е. за 24 часа (точнее за звездные сутки — 23^h56^m, но в дальнейших расчетах такая точность явно чрезмерна). Радиус орбиты спутника равен сумме высоты h, на которой он находится, и радиуса Земли $R_\oplus$. Полная длина орбиты спутника равна $2\pi(R_\oplus+h)$. Он ее проходит за время T, за которое точка экватора проходит окружность экватора, т.е. $2\pi R_\oplus$.

Скорости спутника и точки на экваторе сонаправлены, но скорость спутника больше (поскольку за одно и то же время он проходит большее расстояние). Следовательно, чтобы найти относительную скорость, надо из скорости спутника вычесть скорость точки на экваторе (расстояния при этом мы будем измерять в километрах, а время — в часах):

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{сп}} - v_{\text{экв}} = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} - \frac{2\pi R_\oplus}{T} = \frac{2\pi h}{T} = \frac{2\pi \cdot 36 \cdot 10^3}{24} \approx 10^4\ \text{км/час}.$$

Задача № 53

В полдень 22 марта в столице Болгарии Софии в комнате с закрытым занавеской окном на противоположной окну стене комнаты виден «зайчик» от дырки в занавеске. Расстояние между окном и противоположной стеной равно 5 метрам. В какую сторону движется «зайчик» для человека, смотрящего на него? Оцените скорость его движения.

Решение. Болгария находится в Северном полушарии (и даже заведомо севернее Северного тропика), т.к что Солнце в ней в полдень будет находиться с южной стороны от зенита. Это означает, что для человека, смотрящего на Солнце, оно движется слева направо, и в том же направлении будет двигаться зайчик для человека, который будет смотреть на него.

Зайчик движется с той же угловой скоростью, что и Солнце, т.е. $15°$/час (поскольку дело происходит практически в день равноденствия, то за сутки Солнце на небе описывает большой круг — $360°$). Поскольку Солнце и зайчик всегда находятся с противоположных сторон от дырки в занавеске, то и зайчик также будет перемещаться с угловой скоростью $15°$/час.

Осталось понять, на каком расстоянии зайчик будет находиться от дырки. В самом деле, поскольку Солнце находится не на горизонте, то и расстояние от дырки до зайчика не равно расстоянию от окна до стены. Широту Болгарии можно грубо считать равной 45° (в решении можно использовать оценки в очень широких пределах — от 30° до 60°), и тогда нам надо найти длину гипотенузы прямоугольного треугольника, в котором один из углов равен широте Болгарии, а противолежащий катет — 5 метрам. Это можно сделать с помощью чертежа, и в результате окажется, что расстояние R от дырки до зайчика составляет от 6 до 10 метров.

Если Солнце за 24 часа проходит окружность, то и зайчик (если бы он двигался по сферической поверхности, а Земля была прозрачной) сделал бы то же самое. Тогда за сутки зайчик должен пройти расстояние $2\pi R$ — в пределах $40 \div 60$ м. Делим это расстояние на 24 часа и получаем окончательный ответ: скорость зайчика составляет $1.5 \div 2.5$ метра в час.

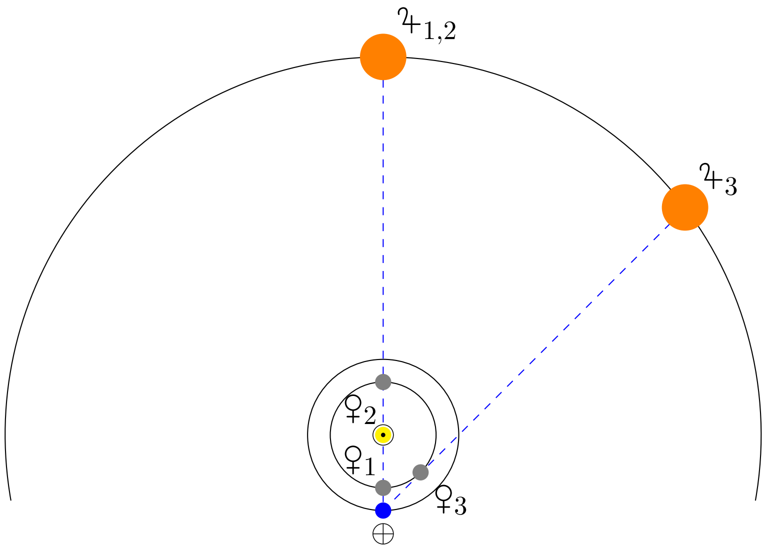
Задача № 54

В какой-то момент произошло прохождение Венеры по диску Юпитера, видимое с Земли. Оцените максимально возможную и минимально возможную часть диска Юпитера, которая могла была закрыта Венерой в момент максимальной фазы покрытия. Радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е., радиус орбиты Венеры 0.7 а.е., радиус Юпитера в 12 раз больше радиуса Венеры.

Решение. Изобразим возможное покрытие на чертеже (в масштабе). Сразу же можно отметить, что расстояние до Юпитера и, следовательно, угловой размер его диска Юпитера почти не меняются. До Венеры в положении 1 от Земли 0.3 а.е., в положении 2 — 1.7 а.е. До Юпитера в любом случае около 6 а.е. (аккуратный расчет показывает, что минимальное расстояние — в положении 3 — составит около 5.7 а.е., но на итоговый результат это никак не влияет).

В максимальной элонгации Венеры (положение 3) от Земли до Венеры 0.7 а.е. (что можно легко получить, воспользовавшись теоремой Пифагора), т.е. примерно в 2 раза больше, чем в нижнем соединении, т.е. это промежуточный случай между двумя крайними: максимально возможная закрытая часть будет, когда Венера в нижнем соединении, а минимальная — когда в верхнем.

Сравним угловые размеры Юпитера и Венеры. Очевидно, что чем больше радиус планеты, тем больше угловые размеры. Чем дальше планета, тем меньше угловые размеры.



Максимальная часть (положение 1):

Юпитер по линейным размерам в 12 раз больше Венеры, но в $6/0.3 = 20$ раз дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $20/12 \approx 1.6$ раза меньше, чем Венеры, следовательно, Венера может закрыть Юпитер полностью.

Минимальная часть (положение 2):

Юпитер в 12 раз больше Венеры, и всего в $6/1.7 \approx 3.5$ раза дальше, следовательно, угловой размер Юпитера в таком положении будет в $12/3.5 \approx 3.7$ раза больше, чем Венеры, поэтому Венера закроет примерно $1/3.7^2 \approx 1/14$ часть площади Юпитера.

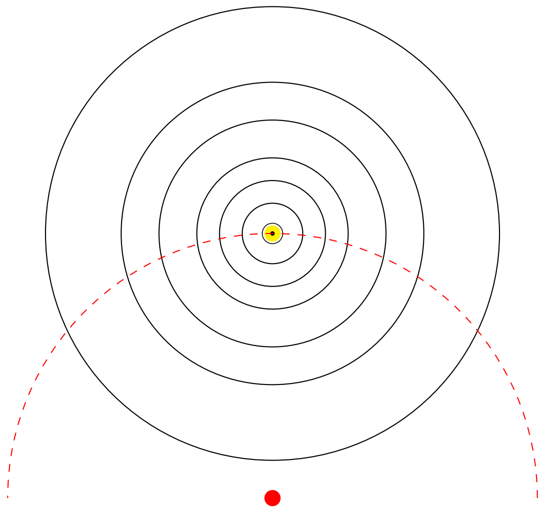
Заметим, что ближайшее подобное прохождение Венеры по Юпитеру, принципиально видимое с Земли (когда Венера будет близка к своему верхнему соединению), произойдет 22 ноября 2065 года. Конечно, из-за близости планет к Солнцу его будет трудно наблюдать.

А предыдущее прохождение Венеры по Юпитеру, видимое с Земли, случилось 200 лет назад: 3 января 1818 года.

Задача № 55

Межзвездный корабль терпит бедствие на границе Солнечной системы. Капитан корабля посылает радиосигнал ко всем большим планетам Солнечной системы. Сколько времени может пройти между приемами сигналов на планетах? Орбиты планет считать круговыми. Докажите, что существует такое расположение планет, при котором сигнал будет принят на всех планетах одновременно.

Решение. Докажем сначала последнее утверждение. Посмотрим, как будет распространяться сигнал от корабля, находящегося на границе Солнечной системы в плоскости эклиптики (в которой примерно лежат орбиты всех планет). Спустя время Δt после отправления сигнала свет достигнет сферы радиуса $c\Delta t$, где c — скорость света. Значит, если планеты в какой-то момент времени будут располагаться на одной из таких сфер, то сигнал будет принят одновременно. Нарисуем семейство сфер для разных значений Δt и выберем такую, которая проходит через Солнце (см. рисунок ниже). Такая сфера пересечет и орбиты всех планет, значит, если в точках пересечения сферы с орбитами будут располагаться планеты, то сигнал на них будет получен одновременно. Таким образом, минимально возможное время между приемами сигналов на планетах равно 0.



Оценим максимальное время. Поскольку орбиты больших планет заключены в сфере с радиусом, равным радиусу орбиты Нептуна, то наибольшее расстояние между двумя планетами не может превосходить диаметра орбиты Нептуна. Время приема сигналов будет наибольшим в том случае, когда корабль, Солнце и две самых далеких от Солнца планеты, Уран и Нептун, расположены на одной линии, причем одна из планет расположена по другую сторону от Солнца относительно корабля. В данном случае разность времени приема сигнала будет равна времени, в течение которого сигнал пройдет расстояние, равное сумме радиусов орбит Нептуна и Урана. Радиус орбиты Нептуна равен примерно 30 а.е., радиус орбиты Урана — примерно 20 а.е. Поскольку известно, что расстояние 1 а.е. свет проходит примерно за 8 минут, то расстояние между планетами сигнал пройдет за $(30 + 20) \cdot 8 = 4 \cdot 10^2$ минут.

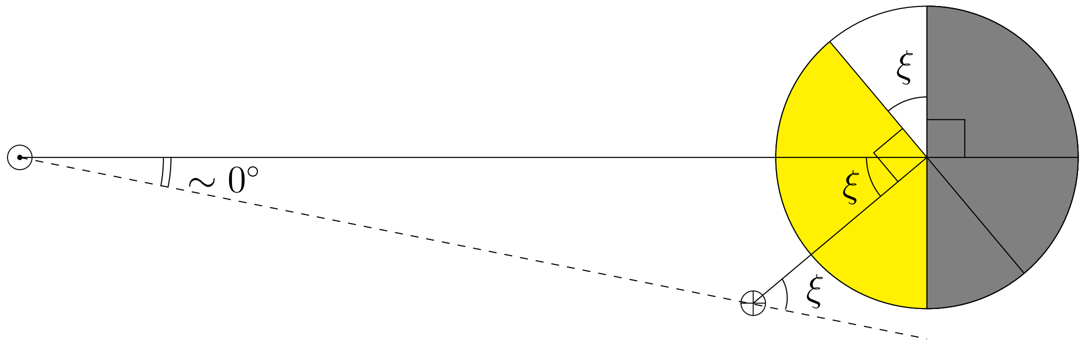
Задача № 56

В некоторый день Луна, будучи в полнолунии, покрыла Альдебаран. Через месяц Луна снова покрыла Альдебаран. Какой была фаза Луны (с точностью до 1%) во время второго покрытия?

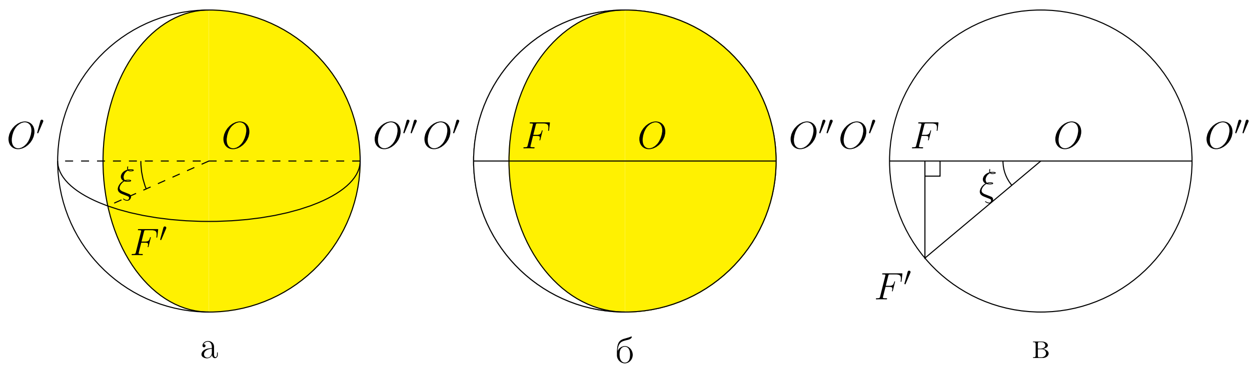
Решение. То, что по условию задачи Луна во время первого покрытия была полной, означает, что Альдебаран, Луна, Земля и Солнце находились на одной линии в указанном порядке.

В следующий раз Луна покроет Альдебаран ровно через то время, которое ей требуется, чтобы завершить оборот вокруг Земли относительно звезд. Это время равно 27.3 суток. Для того, чтобы полностью повторилась фаза Луны, необходимо чуть большее время — т.к называемый синодический месяц — 29.5 суток. То есть к следующему покрытию Луна «не дойдет» до фазы 100%, при которой было предыдущее покрытие, примерно 2 суток, или на угол $\xi = 2 \cdot (360^\circ/29.5) \approx 24^\circ$.

Нарисуем схему образования фазы Луны (Луна для наглядности сильно увеличена).



В треугольнике $\oplus\odot$☾ сторона $\oplus\odot$ примерно в 400 раз больше стороны $\oplus$☾, т.к что можно считать, что угол при $\odot$ близок к нулю, а угол при ☾ равен ξ. Таким образом, угол, стягивающий сектор, закрашенный белым на рисунке, а, следовательно, и двугранный угол, «вырезающий» часть площади, освещенной Солнцем и не видимой с Земли, равен ξ (см. ниже рис. а).



При проецировании изображения Луны на небесную сферу получится «серп», изображенный на рис. б, наибольшая ширина освещенной части которого $O''F$ определяется как $OO'' + OF$ (рис. в). $OO'' = OO' = OF' = R_☾$, где $R_☾$ — радиус изображения Луны на небе.

$$O''F = OO'' + OF = OO'' + OF' \cos\xi = R_☾ (1 + \cos\xi).$$

Фаза Φ — это отношение освещенной части диаметра к полному диаметру, следовательно,

$$\Phi = \frac{R_☾ (1 + \cos\xi)}{2R_☾} = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2\xi}}{2} \approx \frac{1 + \sqrt{1 - 0.4^2}}{2} \approx 0.95,$$

т.е. 95%.

Задача № 57

В Древней Греции термином «стадий» называли расстояние, которое человек проходит за время восхода Солнца. Определим аналогичное понятие для Луны: лунным стадием назовем расстояние, которое пройдет наблюдатель в течение времени восхода Земли для этого наблюдателя. Оцените минимальную величину такого лунного стадия.

Решение. Если не учитывать либрацию Луны, то изменение положения Земли над горизонтом Луны будет связан с изменением пункта наблюдения. Угловое расстояние, на которое требуется переместиться наблюдателю по поверхности Луны, равно угловому диаметру Земли для наблюдателя на Луне (угол между точками касания двух общих касательных для окружностей). Угловой диаметр Земли равен приблизительно

$$d = \frac{2R_\oplus}{r} = \frac{2 \cdot 6.4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^5} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 2^\circ.$$

Заметим, что тот же результат можно получить, зная, что угловой диаметр Луны для земного наблюдателя равен $\approx 0^\circ.5$, а радиус Земли примерно в 4 раза превышает лунный.

Теперь определим расстояние на поверхности Луны, соответствующее угловому расстоянию 2°: $l = d \cdot R \approx d \cdot R_\oplus/4 = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 6.4 \cdot 10^3/4 \approx 50$ км.

Задача № 58

Маша увидела мем в интернете: «На верхней полке ехать выгодно! За счет кривизны поверхности Земли верхняя полка описывает дугу большего радиуса, чем нижняя. Соответственно, на верхней полке за те же деньги проезжаешь чуть большее расстояние.» «А ведь и правда!» — подумала Маша и купила билет на верхнюю полку. Сколько денег сэкономит Маша на пути из Петербурга в Москву, если билет стоит 1200 рублей? Москва находится на $7^\circ.5$ восточнее и на 4° южнее Петербурга, железная дорога соединяет города по кратчайшему расстоянию.

Решение. Расстояние вдоль параллели, редуцированное к экватору: $7.5 \cdot \cos 60^\circ \approx 4^\circ$, следовательно, расстояние по прямой (поскольку в 1° дуги меридиана около 110 км) равно $110 \cdot 4\sqrt{2} \approx 620$ км., т.е. примерно 1/10 радиуса Земли, соответствующее дуге в 1/10 радиана. Разность высот полок примем за 1 м, тогда радиус окружности r_1, описываемой нижней полкой, меньше радиуса окружности r_2, описываемого вехрней, на $\Delta r = 1$ м. Длина дуги, описываемой нижней полкой, равна $l_1 = 0.1 \cdot r_1$, а верхней — $l_2 = 0.1 \cdot r_2 = 0.1(r_1 + \Delta r)$. Таким образом, разность путей, пройденных верней и нижней полками, равна $\Delta l = 0.1 \cdot \Delta r = 0.1$ м, что составляет $0.1/(620 \cdot 10^3)$ всего пути. Умножая на стоимость проезда — 1200 рублей, получим «разность в стоимости проезда» на верхней и нижней полках: $1200 \cdot 0.1/(620 \cdot 10^3) \approx 2 \cdot 10^{-4}$ рубля или 1/50 копейки.

Задача № 59

12 сентября 2014 года кульминация Дубхе ($\alpha = 11^h 04^m, \delta = 61°40'$) в центре Санкт-Петербурга (на широте $\varphi = 59°56'$) наблюдалась в $23^h 46^m$ по истинному солнечному времени. В этот же момент кульминировала вторая звезда, причем сумма высот этих звезд составила 90°. Определите склонение второй звезды.

Решение. Сначала определим, в какой кульминации — верхней или нижней — находилась Дубхе. Прямое восхождение Солнца в окрестности осеннего равноденствия составляет около 12^h. В $23^h 46^m$ по истинному солнечному времени Солнце находится вблизи нижней кульминации. Соответственно, Дубхе, у которой примерно такое же прямое восхождение, в этот момент также оказалась в нижней кульминации. Тогда высота Дубхе составляет $h_д = \varphi + \delta - 90° = 31°36'$.

Высота второй звезды в кульминации составляет $h = 90° - h_д = 58°24'$. Пусть вторая звезда находилась в верхней кульминации, определим её склонение:

$$h = 90° - |\varphi - \delta| \Rightarrow |\varphi - \delta| = 90° - h = 31°36' \Rightarrow \delta = 28°20'.$$

Если же звезда находилась в нижней кульминации:

$$h = \varphi + \delta - 90° \Rightarrow \delta = 90° + h - \varphi = 88°28'.$$

Задача № 60

Собственное движение второй звезды в два раза меньше, чем первой, а видимая звездная величина на единицу больше. У какой звезды лучевая скорость больше, если полные скорости их равны, а также равны светимости?

Решение. Поскольку светимости звезд равны, то разница звездных величин определяется различием в расстояниях.

$$m_2 - m_1 = 5 \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_2}{r_1} = 10^{0.2} = \sqrt{10^{0.4}} = \sqrt{2.512} \approx 1.6.$$

Тангенциальная компонента скорости пропорциональна $\mu \cdot r$, где μ — собственное движение. Равенство полных скоростей можно переписать в терминах тангенциальных и лучевых компонент скоростей:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + \mu_2^2 r_2^2.$$

Выразим второе слагаемое правой части через μ_1 и r_1:

$$v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + (0.5\mu_1)^2 (1.6 r_1)^2, \quad v_{r,1}^2 + \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2 + 0.64 \mu_1^2 r_1^2, \quad v_{r,1}^2 + 0.36 \mu_1^2 r_1^2 = v_{r,2}^2,$$

то есть вторая звезда обладает большей лучевой скоростью.

Задача № 61

Согласно «Сильмариллиону», движущиеся вокруг Арды Луна (*Итиль*) и Солнце (*Анор*) были созданы для освещения земель после гибели Древ Валар. Предположим, что Итиль и Анор движутся по круговым орбитам почти одинаковых радиусов, причем радиус орбит в несколько раз превышает радиус Арды. Известно, что угловые диаметры Итиль и Анора равны 0.5°, видимая звездная величина Анора в зените совпадает с солнечной. Определите видимую звездную величину Итиль в «полнолуние», считая, что Итиль отражает 40% падающего на ее поверхность света Анора.

Решение. Обозначим радиус орбит Итиль и Анора как d, радиус Арды как R, светимость Анора как L_A. Равенство видимых звездных величин Анора и Солнца обозначает равенство освещенностей от данных объектов. Поскольку освещенности прямо пропорциональны светимости и обратно пропорциональны квадратам расстояний, получим выражение:

$$\frac{L_A}{(d-R)^2} = \frac{L_\odot}{l^2},$$

где l — астрономическая единица, а $L_\odot$ — светимость Солнца. Таким образом, светимость Анора равна $L_A = L_\odot \cdot (d-R)^2/l^2$.

Тогда количество энергии, которое падает за секунду на Итиль в полнолуние, равно

$$\mathcal{E} = \frac{L_A}{4\pi(2d)^2} \cdot \pi r^2 = L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2},$$

где r — радиус Итиль. Тогда освещенность на поверхности Арды, создаваемая Итиль, оказывается равной

$$\frac{0.4 \cdot \mathcal{E}}{4\pi(d-R)^2} = 0.4 L_\odot \cdot \frac{(d-R)^2}{l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} \frac{1}{4\pi(d-R)^2} =$$
$$= 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi(2d)^2} = 0.4 \frac{L_\odot}{4\pi l^2} \cdot \frac{r^2}{16d^2} = 0.4 E_\odot \cdot \frac{(\alpha/2)^2}{16},$$

где α — видимый угловой диаметр Итиль.

Для определения видимой звездной величины сопоставим полученную освещенность с освещенностью от Солнца:

$$m_\odot - m = 2.5 \lg\left(\frac{E}{E_\odot}\right) = 2.5 \lg\left(0.4 \frac{(\alpha/2)^2}{16}\right) \approx 2.5 \lg(10^{-6}) = -15.$$

Поскольку видимая звездная величина Солнца равна -27^m, то видимая звездная величина Итиль получается равной -12^m.

Задача № 62

Двойная звезда с обращающимися по круговой орбите компонентами равных масс наблюдается на телескопе с диаметром 50 см. Известно, что каждый компонент имеет предельную для данного телескопа видимую звездную величину при наблюдении глазом, а угловое расстояние между звездами совпадает с разрешающей способностью телескопа. Обе звезды являются звездами главной последовательности. Каков период обращения данных звезд, если расстояние до них равно 1000 пк?

Решение. Связь предельной видимой звездной величины с диаметром телескопа можно представить формулой

$$m_{\text{lim}} - 6 = 5 \lg \left(\frac{D}{5 \text{ мм}} \right), \quad m_{\text{lim}} = 6 + 5 \cdot 2 = 16.$$

Абсолютная звездная величина компонентов равна

$$M = m + 5 - 5 \lg r = 16 + 5 - 5 \lg 1000 = 6.$$

Найдем светимость каждого компонента L, сравнив звезду с Солнцем:

$$M - M_{\odot} = 2.5 \lg \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right), \quad 1.2 = 2.5 \lg \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right), \quad L/L_{\odot} \approx 1/3.$$

Поскольку для звезд главной последовательности приблизительно выполняется пропорциональность $L \propto \mathfrak{M}^4$, где $\mathfrak{M}$ — масса звезды, то в данном случае масса звезды будет равна $(1/3)^{1/4}\mathfrak{M}_{\odot} \approx \frac{3}{4}\mathfrak{M}_{\odot}$.

Определим большую полуось орбиты звезд. Разрешающая способность телескопа равна $\alpha \approx \lambda/D = 5 \cdot 10^{-7}/0.5 = 10^{-6}$. Тогда большая полуось орбиты равна $\alpha \cdot r \approx 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^2$ а.е.

Третий закон Кеплера в системе единиц «а.е. — год — масса Солнца» имеет вид

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

поэтому

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}} \approx \sqrt{\frac{2^3 \cdot 10^6}{1.5}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ лет}.$$

Задача № 63

По-словенски Млечный Путь называется «Римской дорогой» (*Rimska cesta*). Если все дороги ведут в Рим, то уж Римская точно должна. Верно ли это для жителя Любляны, наблюдающего проходящий через зенит Млечный Путь? Найдите угол между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой». Координаты столицы Словении Любляны: $46°$ с.ш., $14°30'$ в.д., координаты Рима: $42°$ с.ш., $12°30'$ в.д. Считайте что координаты северного полюса Галактики $\alpha = 12^h50^m$ и $\delta = +27°$.

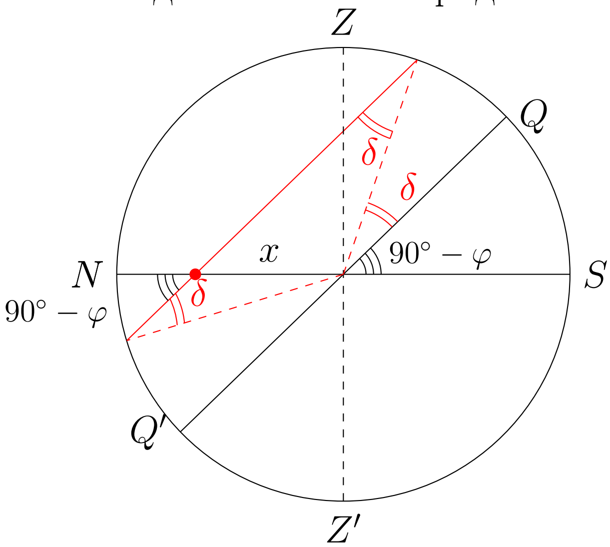
Решение. Направления на полюса Галактики перпендикулярны плоскости Млечного Пути (которая соответствует некоторому большому кругу на небесной сфере). Поэтому если Млечный Путь в некоторый момент проходит через зенит, то полюса Галактики в этот же момент находятся на горизонте.

Если «Римская дорога» действительно ведет в Рим, то это означает, что азимут одной из точек пересечения Млечного Пути с горизонтом совпадает с азимутом Рима в Любляне, а в этом случае азимут Рима и азимут полюса Галактики должны отличаться на $90°$. Как следствие, отличие разности этих азимутов от $90°$ и будет углом между направлением на Рим и направлением, задаваемым «Римской дорогой».

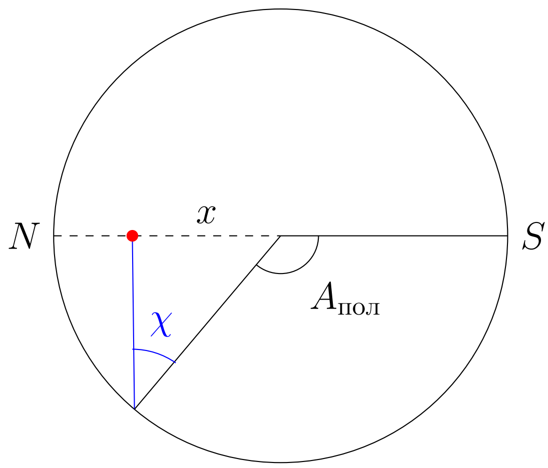
Начнем с поиска азимута Рима. Он находится не слишком далеко от Любляны, поэтому можно ограничиться плоским приближением. Из данных задачи следует, что Рим на $4°$ южнее и на $2°$ западнее Любляны. Учитывая, что один градус долготы на широте $\varphi \approx 45°$ соответствует расстоянию, в $1/\cos\varphi = \sqrt{2} \approx 1.4$ меньшему, чем градус широты, получаем, что тангенс азимута Рима $\operatorname{tg} A_{\text{Рим}} \approx 1.4/4 \approx 1/3$, а сам азимут $A_{\text{Рим}} \approx 20°$ (его можно оценить по значению тангенса, считая угол малым: поскольку Млечный Путь все же не бесконечно тонкий, погрешность даже в несколько градусов вполне допустима).

Осталось оценить азимут полюса Галактики на горизонте. Это можно сделать с помощью сферической тригонометрии (если участник умеет ей пользоваться), однако мы изложим технически более простое решение, позволяющее при некоторой аккуратности (а также при наличии линейки, циркуля и транспортира, использование которых правилами олимпиады не запрещено) обойтись вообще без вычислений.

вид в плоскости меридиана



вид в плоскости горизонта



Построим проекцию небесной сферы на плоскость небесного меридиана для Любляны (левый рисунок). Тут NS — горизонт, а QQ' — небесный экватор. Нарисуем на этой проекции суточную параллель полюса Галактики (сплошная красная линия) и найдем точку ее пересечения с горизонтом (большая красная точка). Затем построим еще одну проекцию небесной сферы, только теперь на плоскость горизонта. Перенеся на нее большую красную точку с предыдущего рисунка, мы найдем положение точки захода полюса, если опустим перпендикуляр с линии NS вниз до пересечения с окружностью. Получившийся угол $A_{\text{пол}}$ — это азимут точки захода полюса. Поскольку все откладываемые углы известны, то при построении обоих чертежей можно отмерять правильные значения углов, после чего построенный азимут нужно будет просто измерить транспортиром.

Однако те же рисунки позволяют и вычислить результат численно. На левом рисунке для треугольника «центр сферы – точка захода – нижняя точка суточной параллели» можно записать теорему синусов, из которой следует, что

$$\frac{x}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin(90^\circ + \varphi)}$$

(радиус небесной сферы считается равным единице), а из правого рисунка следует, что $x = \sin\chi$. Отсюда

$$\sin\chi = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \approx \frac{9}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

поэтому $\chi \approx 40^\circ$, а $A_{\text{пол}} = 90^\circ + \chi$.

Последний вывод означает, что χ — это как раз и есть азимут, на который направлена «Римская дорога», и это означает, что для жителя Любляны Млечный Путь и в самом деле довольно неплохо указывает на Рим, отклонение от правильного направления составляет около 20° к западу. Можно также заметить, что Словения простирается на восток от Любляны примерно на 2°, т.к что в восточной Словении название «Римская дорога» является совершенно точным.

Заметим, что при решении задачи можно было аналогичным образом найти азимут не только точки захода полюса, но и точки восхода (или захода, но южного полюса Галактики), получив тем самым второе возможное решение этой части задачи. Однако после определения азимута Рима (или просто осознания, что Рим находится юго-западнее Любляны) становится очевидным, что второе решение дает заведомо худшее совпадение направлений, чем первое. В самом деле, из соображений симметрии можно заключить, что угол между направлением на Рим и направлением «Римской дороги» в этом случае составит около 60°.

Примечание. Возможно, жителям Словении было бы чуть проще оценить правдоподобность их названия Млечного Пути, но, как и в одной из задач 5–6 классов, соревнование честное — в этой параллели и в этом туре участников из Словении не было, что и позволило использовать задачу.

Задача № 64

В галактике на расстоянии 44 Мпк наблюдается мазерный радиоисточник (излучающий на фиксированной длине волны), двигающийся вблизи центральной черной дыры. Орбита источника перпендикулярна картинной плоскости, а большая ось лежит в картинной плоскости. Угловые размеры орбиты источника составляют $0''.0005$, относительное смещение спектральных линий для наблюдаемой звезды относительно лабораторной длины волны составляет от 0.008 до 0.011. Определите массу центральной черной дыры. Собственным вращением звезды пренебречь.

Решение. Определим величину большой полуоси орбиты:

$$a = \frac{\alpha}{2}D = \frac{0.0005}{2} \cdot 44 \cdot 10^6 \approx 11 \cdot 10^3 \text{ а.е.}.$$

Смещение спектральных линий происходит вследствие эффекта Доплера, при этом следует учитывать как скорость удаления самой галактики, т.к и движение звезды в ней. Скорость удаления галактики оценим по закону Хаббла:

$$v_c = H_0 D = 68\,\text{км/с/Мпк} \cdot 44\,\text{Мпк} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

Орбита расположена таким образом, что максимальная и минимальная лучевые скорости соответствуют расположению звезды в апоцентре и перицентре орбиты. Однако направление вращения звезды неизвестно.

$$\delta\lambda_i = \frac{v_c \pm v_\alpha}{c}, \quad \delta\lambda_j = \frac{v_c \mp v_\pi}{c}.$$

Изначально неизвестно, какое смещение соответствует перицентру, какое — апоцентру. Выразим модули скорости в апоцентре и перицентре:

$$v_\alpha = |v_c - c\delta\lambda_i|, \quad v_\pi = |v_c - c\delta\lambda_j|.$$

Заметим, что скорость в апоцентре должна быть меньше скорости в перицентре. Вычислим значения модулей:

$$\left|3 \cdot 10^3 - 0.008 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 600 \text{ км/с}, \quad \left|3 \cdot 10^3 - 0.011 \cdot 3 \cdot 10^5\right| = 300 \text{ км/с}.$$

Заметим, что первое выражение без модуля положительно, второе — отрицательно. Таким образом, в перицентре скорость составляет 600 км/с, в апоцентре — 300 км/с. Скорости в перицентре и апоцентре можно выразить через параметры орбиты и массу притягивающего центра:

$$v_\pi^2 = \frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}, \quad v_\alpha^2 = \frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e} \quad \Longrightarrow \quad v_\alpha v_\pi = \frac{GM}{a}.$$

Отсюда получим оценку для массы центрального тела:

$$M = \frac{v_\alpha v_\pi a}{G} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0.06 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 4 \cdot 10^{36} \text{ кг} = 2 \cdot 10^6 M_\odot.$$

Задача № 65

Оцените среднюю поверхностную плотность протопланетного диска, из которого была образована наша Солнечная система, если по современным представлениям отношение пылевой компоненты в диске составляет 1% от газовой компоненты, а пояс Койпера образовался на его краю.

Решение. Планеты земной группы, спутники планет и астероиды образовались из пылевой компоненты, а не из газовой. Газовые гиганты — это первые сгустки пыли, которые затем притянули на себя большую массу газа и при этом не растеряли ее в процессе эволюции. Тогда для оценки можно считать, что у газового гиганта каменное ядро составляет 1% по массе. Вспомнив или примерно оценив массу Юпитера (318 масс Земли), Сатурна (95 масс Земли), Урана и Нептуна (по ≈ 15 масс Земли), а также Венеру и саму Землю, можно посчитать суммарную массу пыли, которая пошла на построение наиболее крупных планет: $3 + 1 + 2 \cdot 0.1 + 1 + 1 \approx 6$ масс Земли. Если учтем еще и Марс (0.1 массы Земли), Меркурий (в пять раз тяжелее Луны) а также все спутники (крупных порядка тридцати штук, а их масса сопоставима с массой Луны, равной 1/81 массы Земли) и астероиды (главный пояс астероидов составляет 4% массы Луны, пояс Койпера в ≈ 100 раз массивнее последнего), то оценка изменится несущественно и возрастет в лучшем случае до $7 \div 8$ масс Земли.

Таким образом, можно считать, что исходная масса диска составляла порядка $8 \cdot 10^2$ масс Земли. Размеры пояса Койпера — до $55 \div 60$ а.е. То есть общая площадь протопланетного диска составляла $\pi \cdot 60^2 \approx 10^4$ а.е.^{2}. Пространством в центре диска из-за наличия Солнца можно пренебречь, т.к. площадь, ограниченная орбитой Меркурия, заметно меньше 1 а.е.^{2}. Итого, средняя поверхностная плотность

$$\sigma = 8 \cdot 10^2/10^4 M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 8 \times 10^{-2} M_\oplus/\text{а.е.}^2 = 5 \times 10^{23}\text{кг/а.е.}^2 \approx 20 \text{ кг/м}^2$$

Задача № 66

В повести Н. Носова «Незнайка на Луне» приключения главного героя проходили внутри полой Луны, среди коротышек, живущих на ядре внутри Луны. Представим, что в результате тотальной войны между обитателями Луны внешняя оболочка распалась на небольшие фрагменты, не связанные друг с другом. За какое время эти фрагменты упадут на ядро? Считайте, что масса Луны распределена поровну между ядром и оболочкой, масса оболочки распределена по ней равномерно, толщина оболочки и размер ядра пренебрежимо малы в сравнении с радиусом Луны.

Решение. Движение каждого отдельного малого кусочка оболочки можно рассматривать как движение под действием ускорения, создаваемого гравитацией ядра и остальной оболочки. Выделим малый кусочек массы и найдем эти две составляющие. Пусть в некоторый момент радиус оболочки равен r. Тогда, по закону всемирного тяготения, ускорение кусочка оболочки вследствие притяжения его ядром равно $g_я = \frac{GM_☾}{2r^2}$, где $M_☾$ — масса Луны (по условию она разделилась поровну между маленьким ядром и абсолютно тонкой оболочкой).

С оценкой ускорения, создаваемого остальной оболочкой, дело обстоит несколько сложнее. Пусть кусочек массы dm имеет площадь dS. Известно, что потенциальная энергия самогравитирующей сферы массы M и радиуса r равна $\Phi = -\frac{GM^2}{2r}$ (в нашем случае $M = M_☾/2$). Пусть сила гравитации, приходящаяся на единицу площади оболочки, равна p (фактически эта величина имеет смысл давления, действующего на оболочку). Мысленно изменим радиус сферы на величину dr и запишем закон сохранения энергии, чтобы найти p:

$$A = p\,dV = p\,4\pi r^2\,dr = -d\Phi = -d\left(\frac{GM^2}{2r}\right) = \frac{GM^2}{2r^2}\,dr.$$

Отсюда

$$p = \frac{GM^2}{2r^2\,4\pi r^2},$$

а сила гравитации, действующей на кусочек массой dm и площадью dS, равна $F = p\,dS$. Заметив, что $\frac{M\,dS}{4\pi r^2} = dm$, получаем, что

$$F = p\,dS = \frac{GM\,dm}{2r^2},$$

т.е. гравитационное ускорение, которое получает оболочка при воздействии самой на себя, равно ускорению, которая получала бы частица массы dm при воздействии на ее половины массы оболочки, сосредоточенной в центре.

Тот же вывод можно получить и другим способом, несколько менее честным, но не требующим привлечения информации о потенциальной энергии самогравитирующей сферы и дифференцирования. Рассмотрим оболочку конечной (хотя и малой) толщины и разделим ее на тонкие концентрические слои. В соответствии с теоремой Ньютона самый внешний слой притягивается остальной оболочкой т.к же, как материальной точкой с массой, равной массе оболочки, и расположенной в центре сферы. На самый внутренний слой — в соответствии с утверждением той же теоремы — оболочка просто не действует. Каждый же промежуточный слой притягивается только той массой оболочки, которая находится внутри него. Поскольку оболочка тонкая, то притягивающая некоторый слой масса линейно меняется с глубиной от полной массы оболочки до нуля, и в среднем произвольный малый кусочек оболочки притягивается массой, равной половине массы оболочки. Очевидно, что если устремить толщину оболочки к нулю, то полученный результат не изменится, а отсюда сразу же следует вывод, сделанный абзацем выше.

Таким образом, задача сводится к выяснению того, за какое время пробная частица, находящаяся с нулевой начальной скоростью на расстоянии, равном радиусу Луны $R_{☾}$, упадет на притягивающий центр, масса которого равна $\frac{3}{4}M_{☾}$. Вычисляя это время t с помощью III закона Кеплера как половину периода вырожденной эллиптической орбиты с большой полуосью, равной $R_{☾}/2$, получаем

$$\frac{(2t)^2}{(R_{☾}/2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 3M_{☾}/4},$$

откуда

$$t = \pi\sqrt{\frac{R_{☾}^3}{6GM_{☾}}}.$$

Далее можно либо оценить радиус Луны (например, как 1/4 радиуса Земли) и массу Луны (как 1/80 массы Земли), вычислив результат непосредственно, либо предварительно преобразовать полученное выражение к виду

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{8G\rho}},$$

где $\rho = \frac{M_{☾}}{\frac{4}{3}\pi R_{☾}^3}$ — средняя плотность Луны. Последняя составляет примерно 3 г/см^3, но даже достаточно грубая оценка этой величины не слишком сильно изменит результат, поскольку $t \propto \rho^{-1/2}$. В итоге получаем, что время падения составит около 20 минут.

Задача № 67

Солнечный парус, изначально покоившийся на земной орбите, вследствие солнечной вспышки приобрел скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную от Солнца. Как далеко от Солнца он сможет улететь? Гравитационным взаимодействием с планетами пренебречь, парус полностью отражает все падающее на него излучение.

Решение. Сила светового давления, действующая на покоящийся парус, компенсирует его притяжение к Солнцу:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2} = 0.$$

Это уравнение выполняется при любом гелиоцентрическом расстоянии паруса r. Означает ли это, что парус будет двигаться равномерно и покинет пределы Солнечной системы?

Нет! Если парус начинает двигаться, в игру вступает эффект Доплера. Рассмотрим фотон, летящий «вдогонку» парусу, движущемуся со скоростью v, и имеющий энергию E. В системе отсчета паруса его энергия меньше, чем в «солнечной»:

$$E' = E\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Хотя энергия фотона при отражении не меняется в системе отсчета паруса, в «солнечной» она составит уже

$$E'' = E'\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Таким образом,

$$E'' = E\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \approx E\left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Если бы парус покоился, при отражении этого фотона ему был бы передан импульс

$$\Delta p = \frac{2E}{c},$$

для движущегося же паруса

$$\Delta p'' = \frac{2E}{c}\left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Можем заключить, что на движущийся парус оказывается меньшая сила светового давления.

Уравнение движения паруса имеет вид

$$ma = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\frac{S}{c}\left(1 - \frac{2v}{c}\right) - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}$$

и с учетом условия равновесия для покоящегося паруса записывается как

$$ma = -\frac{2G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2 c}v.$$

Домножим обе части на Δt:

$$\frac{mc}{2}\Delta v = -\frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r^2}\Delta r.$$

В правой части полученного соотношения стоит не что иное, как работа гравитационных сил. Мы вполне можем просуммировать ее, поскольку в результате получим просто разность гравитационных потенциальных энергий, взятую со знаком минус:

$$\frac{mc}{2}(v_1 - v_0) = \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_1} - \frac{G\mathfrak{M}_\odot m}{r_0}.$$

Потребуем, чтобы удалению r_1 соответствовала нулевая скорость $v_1 = 0$:

$$\frac{cv_0}{2} = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = G\mathfrak{M}_\odot\frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{r_1 - r_0}{r_1} = \frac{cv_0}{2}\left(\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{r_0}\right)^{-1} = \frac{cv_0}{2v_\oplus^2} = \frac{3\cdot 10^8 \times 3}{2\times(3\cdot 10^4)^2} = \frac{1}{2};$$

$$r_1 = \frac{r_0}{1-1/2} = 2r_0.$$

Солнечный парус отлетит от Солнца и расположится на расстоянии 2 а. е. от него.

Задача № 68

Транснептуновый объект (174567) Варда в настоящее время имеет видимую звездную величину 21^m (при наблюдении с Земли) и находится на расстоянии 48 а.е. от Солнца. Оцените диаметр Варды, если ее поверхность отражает 10% падающего на нее света. Видимая звездная величина Солнца (также при наблюдении с Земли) составляет -27^m.

Решение. Определим, какое количество энергии от Солнца падает на единицу площади поверхности Варды — определим освещенность Варды. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника излучения, тогда освещенность Варды $E_\text{v} = L_\odot/4\pi r^2$. Количество энергии, получаемое Вардой за секунду времени, равно $\mathcal{E} = E_\text{v}\cdot\pi R^2$, где R — радиус Варды.

Определим освещенность, создаваемую Вардой на поверхности Земли. Поскольку нам точно не известно взаимное расположение Солнца, Земли и Варды, будем считать, что Варда удалена от Земли в среднем также на $r = 48$ а. е. Тогда освещенность, создаваемую Вардой для наблюдателя на Земле, можно оценить как

$$E = A\mathcal{E}/(2\pi r^2) = A(L_\odot/4\pi r^2)\cdot\pi R^2/(2\pi r^2) = AL_\odot R^2/8\pi r^4,$$

где $A = 0.1$. Значение радиуса можно определить, сравнив видимые звездные величины Варды и Солнца:

$$m_\text{v} - m_\odot = 2.5\lg\frac{E_\odot}{E} = 2.5\lg\frac{L_\odot/4\pi a_\oplus^2}{AL_\odot R^2/8\pi r^4} = 2.5\lg\frac{2r^4}{AR^2a_\oplus^2}.$$

Выражая результат и вычисляя его в единицах СИ, получаем

$$R = \frac{r^2 10^{0.2(m_\odot - m_\text{v})}}{a_\oplus}\sqrt{\frac{2}{A}} = \frac{(4.8\cdot 10\cdot 1.5\cdot 10^{11})^2\cdot 10^{0.2(-26.7-20.5)}}{1.5\cdot 10^{11}}\sqrt{\frac{2}{0.1}} \approx$$

$$\approx 6\cdot 10^5\ \text{м} = 6\cdot 10^2\ \text{км}.$$

Задача № 69

Определите, на какой широте можно одновременно наблюдать звезды $\alpha\ For$ ($\alpha = 3^h12^m, \delta = -28°59'$) и $\varepsilon\ CMa$ ($\alpha = 6^h58^m, \delta = -28°58'$) на горизонте? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение. Поскольку рефракцией можно пренебречь, то в момент появления звезд на горизонте мы можем считать высоту равной нулю. Также, поскольку значения склонений звезд очень близки, можно считать их находящимися на одной суточной параллели. Тогда для часового угла t, склонения светила δ и широты φ справедливо соотношение

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta,$$

которым можно воспользоваться как готовым фактом, а можно вывести, построив сферический треугольник с вершинами в полюсе мира, зените и светиле и записав для него теорему косинусов.

В момент нахождения звезд на горизонте они располагаются на суточной параллели симметрично относительно небесного меридиана. При этом разность часовых углов равна разности прямых восхождений: $\Delta t = t_1 - t_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, поскольку звезды наблюдаются одновременно в момент звездного времени $s = t_{1,2} + \alpha_{1,2}$.

Рассмотрим точку наблюдения в северном полушарии. Часть суточной параллели звезд с отрицательным склонением, находящаяся над горизонтом, не превосходит половины всей параллели. Поскольку звезды одновременно видны на горизонте, то длина находящейся над горизонтом части суточной параллели равна разности прямых восхождений, а часовой угол заходящей звезды равен половине длины данного участка параллели. Тогда получим выражение для широты:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\delta} = -\frac{\cos\left(\frac{1^h 53^m}{24^h}\cdot 360^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(-28^\circ 59'\right)} \approx -\frac{\cos(30^\circ)}{-\operatorname{tg}\left(30^\circ\right)} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} = 1.5.$$

Можно вспомнить табличные значения тангенсов: $\operatorname{tg}45^\circ = 1$, $\operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.7$. Искомая широта заключена в данном интервале. В качестве пробного значения можно рассмотреть 55° и оценить тангенс такого угла:

$$\operatorname{tg}(55^\circ) = \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ) = \frac{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}5^\circ}{1 + \operatorname{tg}60^\circ \operatorname{tg}5^\circ} \approx \frac{\sqrt{3} - 5/57.3}{1 + \sqrt{3}\cdot 5/57.3} \approx 1.4.$$

У искомого угла тангенс несколько больше, поэтому для оценки можно принять значение $\varphi = 56^\circ$ или 57°. Еще один способ — вспомнить определение тангенса как отношения катетов прямоугольного треугольника, построить треугольник с нужным отношением и измерить угол в нем с помощью транспортира.

Теперь рассмотрим ситуацию для наблюдателя в южном полушарии. В данном случае над горизонтом будет находиться бóльшая часть суточной параллели звезд. Модуль часового угла звезд будет равен дополнению полуразности прямых восхождений до 12 часов:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\left(12^h - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\delta} =\approx -\frac{\cos(150^\circ)}{-\operatorname{tg}\left(30^\circ\right)} \approx -1.5.$$

Поскольку тангенс является нечетной функцией, то в данном случае широта равна $-56° \div -57°$, и это второй возможный ответ задачи.

Задача № 70

При рентгеновских наблюдениях нейтронной звезды с массой, равной 1.4 $\mathfrak{M}_\odot$, и радиусом 11 км была найдена эмиссионная линия с энергией квантов 400 кэВ. В результате какого процесса эта линия образовалась? На какой высоте над поверхностью звезды этот процесс происходил?

Решение. Ключевым для решения задачи является ответ на первый вопрос. Нужно подобрать такой процесс, который приводил бы к излучению фотонов с практически одинаковой энергией, поскольку в противном случае линия не будет выделяться в спектре.

Переходы электронов в атомах не годятся, соответствующие энергии слишком малы. Можно было бы предположить, что речь идет о переходе в практически полностью ионизованном тяжелом атоме, однако можно либо знать, что соответствующие линии попадают максимум в мягкий рентгеновский диапазон (с энергиями на два порядка меньшими, чем требуется), либо догадаться, что характерные энергии таких переходов должны максимум на два-три порядка превышать характерные энергии обычных переходов в обычных атомов (из-за отсутствия в природе химических элементов с номерами около 100 и выше). Возможно, кто-либо из участников знает о существовании циклотронных линий в спектрах нейтронных звезд (возникающих из-за движения заряженных частиц в сильнейших магнитных полях), однако их энергии также на порядок меньше, и, главное, это линии поглощения. При ядерных реакциях образуются γ-кванты, энергия которых существенно больше.

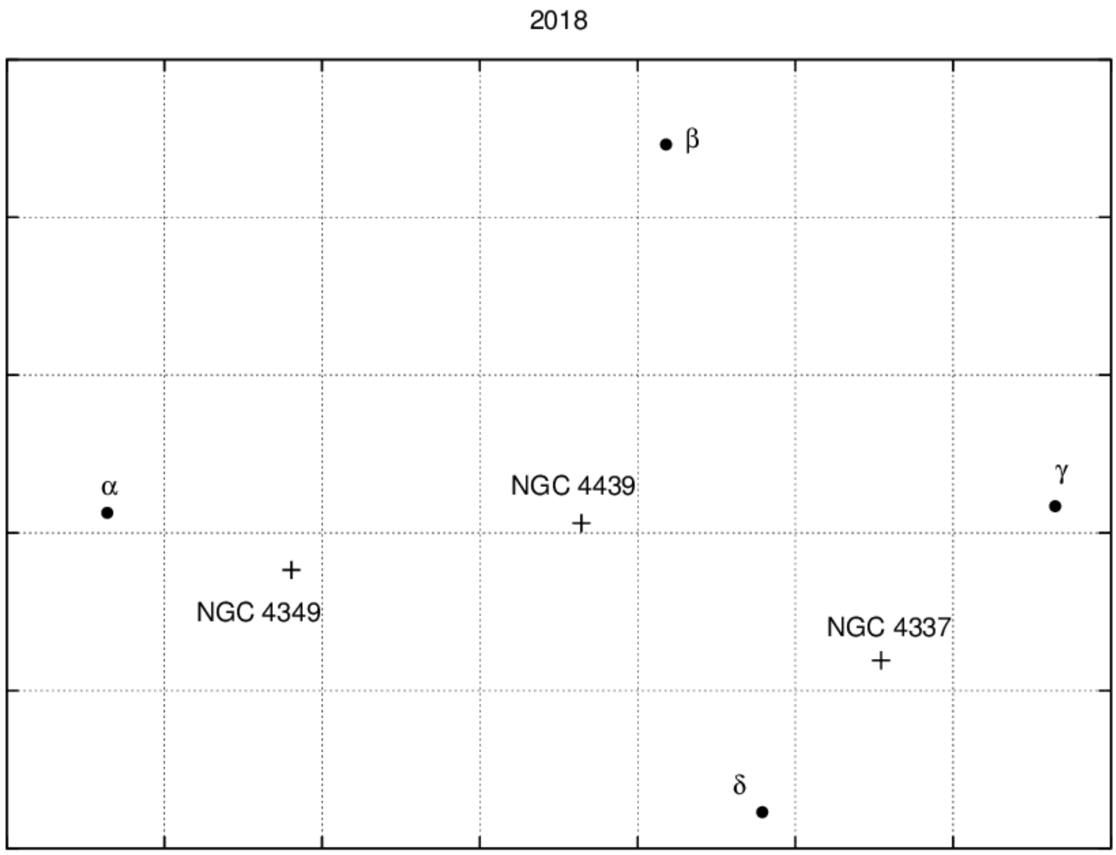
В итоге остается один процесс, который, с одной стороны, достаточно распространен, с другой — приводит к образованию фотонов примерно нужной энергии. Это аннигиляция электрон-позитронных пар. Однако в этом случае должна образовываться линия с энергией 511 кэВ (это энергия покоя электрона), и это означает, что излучение претерпело красное смещение $z = \frac{511-400}{511} \approx \frac{1}{5}$.

Вследствие чего оно могло появиться? Нейтронные звезды с очень большим трудом наблюдаются даже в близких галактиках, т.к что космологическую природу красного смещения можно исключить сразу, оно для этого чрезмерно велико. Допплеровское смещение также не подходит — при таком z объект должен двигаться относительно нас с околосветовой скоростью, а относительные скорости звезд в Галактике (и скорости галактик друг относительно друга) на порядки меньше. Остается один вариант — гравитационное красное смещение. В самом деле, если излучение образуется где-то недалеко от поверхности нейтронной звезды (что косвенно следует из самой формулировки вопроса задачи), то это означает, что свет выходит из гравитационной потенциальной ямы, созданной объектом, чей радиус лишь в несколько раз превышает радиус Шварцшильда, и гравитационное красное смещение в такой ситуации должно быть вполне заметным.

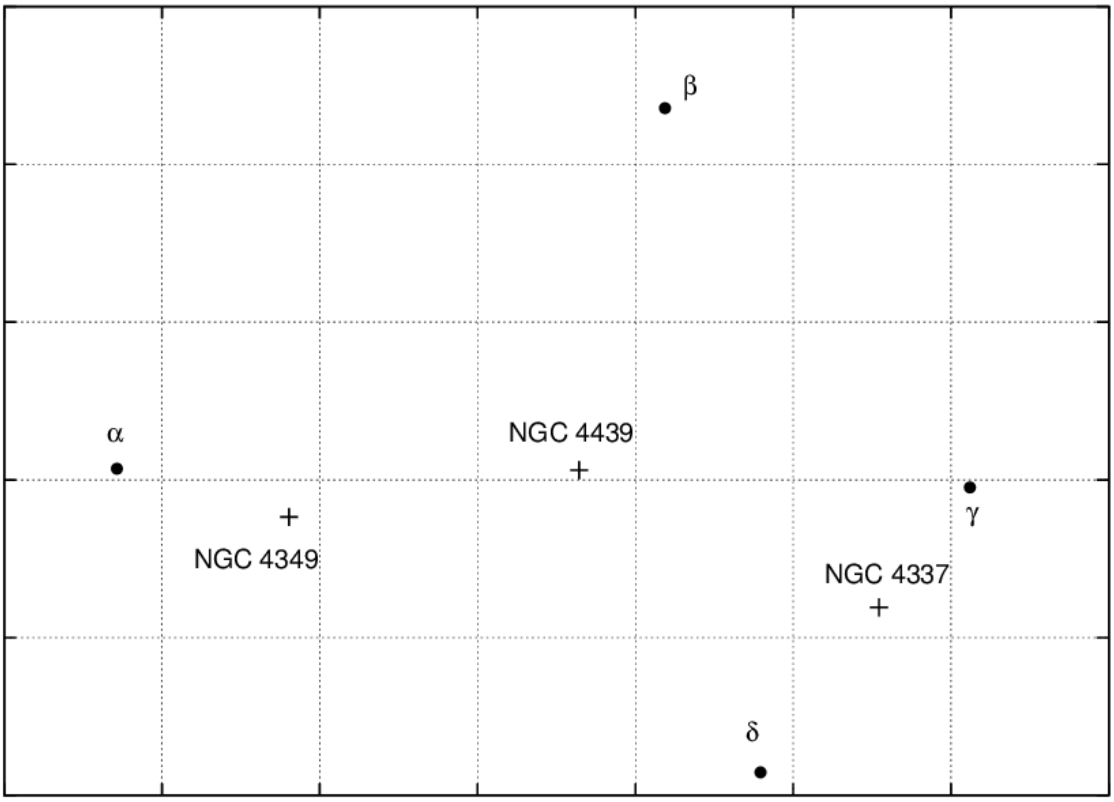
Осталось оценить величину гравитационного красного смещения, которую создает объект массы $\mathfrak{M}$ для излучения, образующегося на расстоянии r от него. Поскольку $z \approx \frac{|\varphi|}{c^2} = \frac{G\mathfrak{M}}{c^2 r}$ (где φ — гравитационный потенциал), из имеющихся данных можно сразу вычислить r. В результате оказывается, что $r \approx 11$ км, т.е. процесс аннигиляции происходит практически на поверхности нейтронной звезды.

Задача № 71

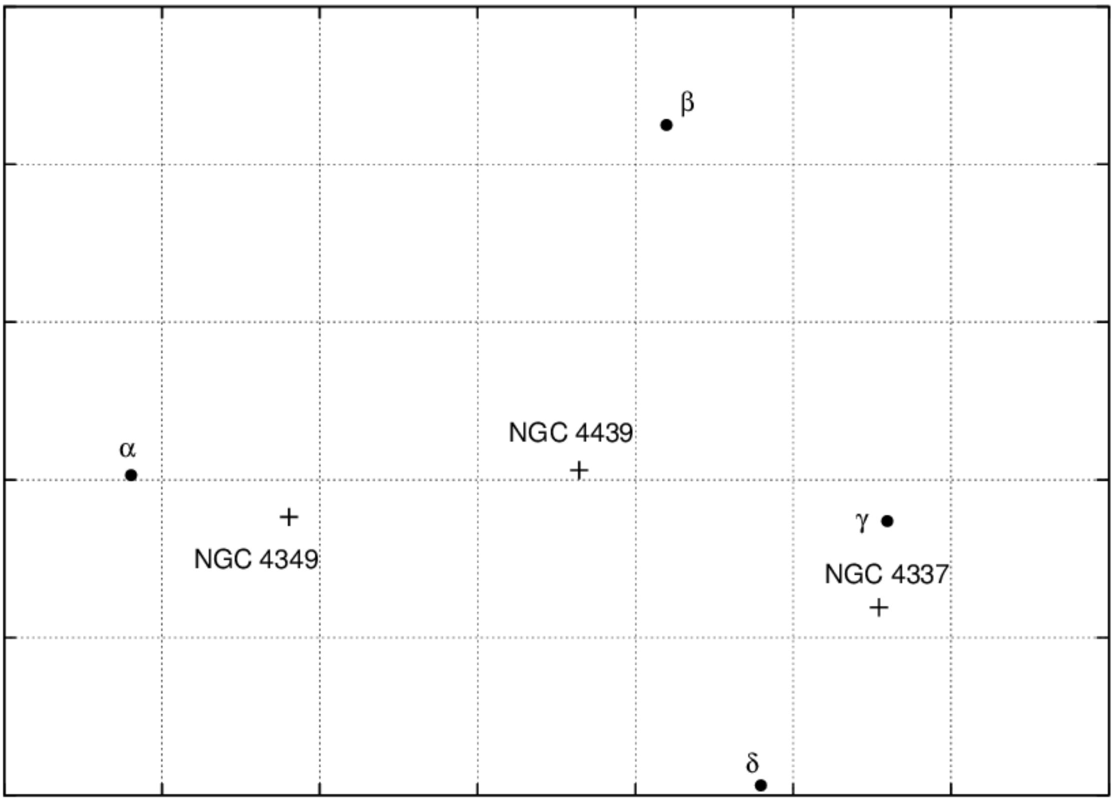
Вам даны три карты, показывающие взаимное расположение четырех звезд α, β, γ и δ созвездия Южный Крест. Также на картах отмечены несколько объектов далекого космоса (NGC 4337, NGC 4349 и NGC 4439). Первая карта показывает расположение звезд на 2018 год, вторая — на 9018 год, третья — на 16018 год. Определите, начиная с какого года данные звезды перестанут образовывать крест, т.е. отрезок, соединяющий α и γ Южного Креста, перестанет пересекать отрезок, соединяющий β и δ. Оцените точность сделанного Вами определения.



9018

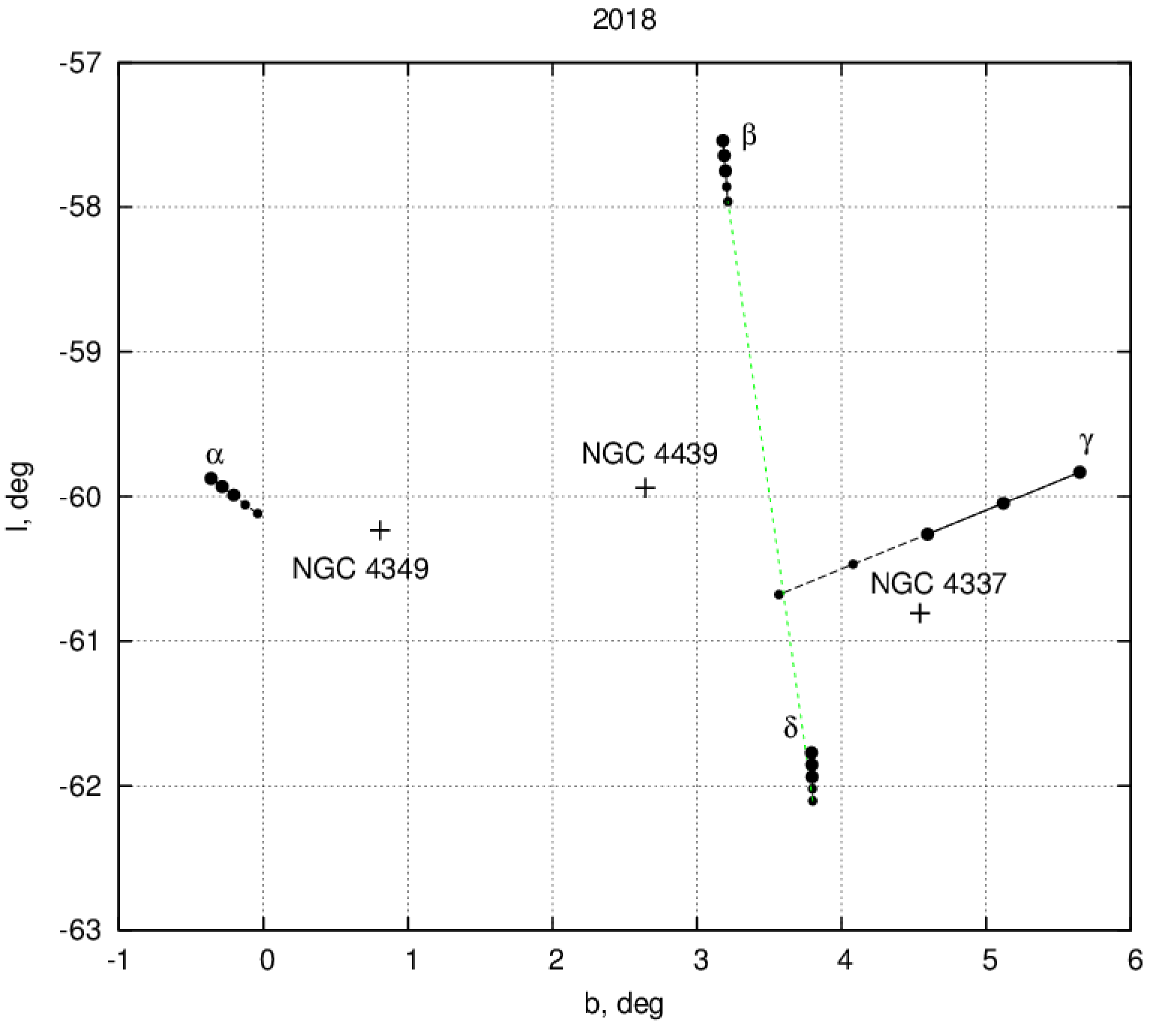

β
α
NGC 4439
γ
NGC 4349
NGC 4337
δ

16018


β
α
NGC 4439
γ
NGC 4349
NGC 4337
δ

Решение. Из условия следует, что NGC 4349, NGC 4337 и NGC 4439 являются далекими объектами. На самом деле, это рассеянные звездные скопления, находящиеся на расстоянии более килопарсека от Солнца. Поскольку данные объекты далеки от Солнца, то на рассматриваемом интервале времени можно считать, что они не меняют положение относительно Солнца. Из сопоставления карт видно, что эти объекты не меняют положения относительно сетки, а, значит, и сетка на всех картах проходит через одни и те же точки небесной сферы. В действительности координатная сетка показывает галактические координаты, начало которых указывает приблизительно в центр Галактики.

Отметим положение звезд на одной карте. Заметим, что звезда γ смещается быстрее остальных звезд. Таким образом, нас интересует время, когда γ Южного Креста пересечет линию, соединяющую звезды β и δ. Звезды смещаются приблизительно вдоль прямых. Отметим предполагаемые местоположения звезд через два следующих промежутка по 7 тысяч лет (смещения отмечены черным пунктиром, предполагаемые положения звезд — маленькими точками). Зеленая линия соединяет звезды β и δ приблизительно в 30000 году. С точностью до 1000 лет можно считать, что Южный Крест перестанет иметь форму креста в 29000 – 30000 годах.



Задача № 72

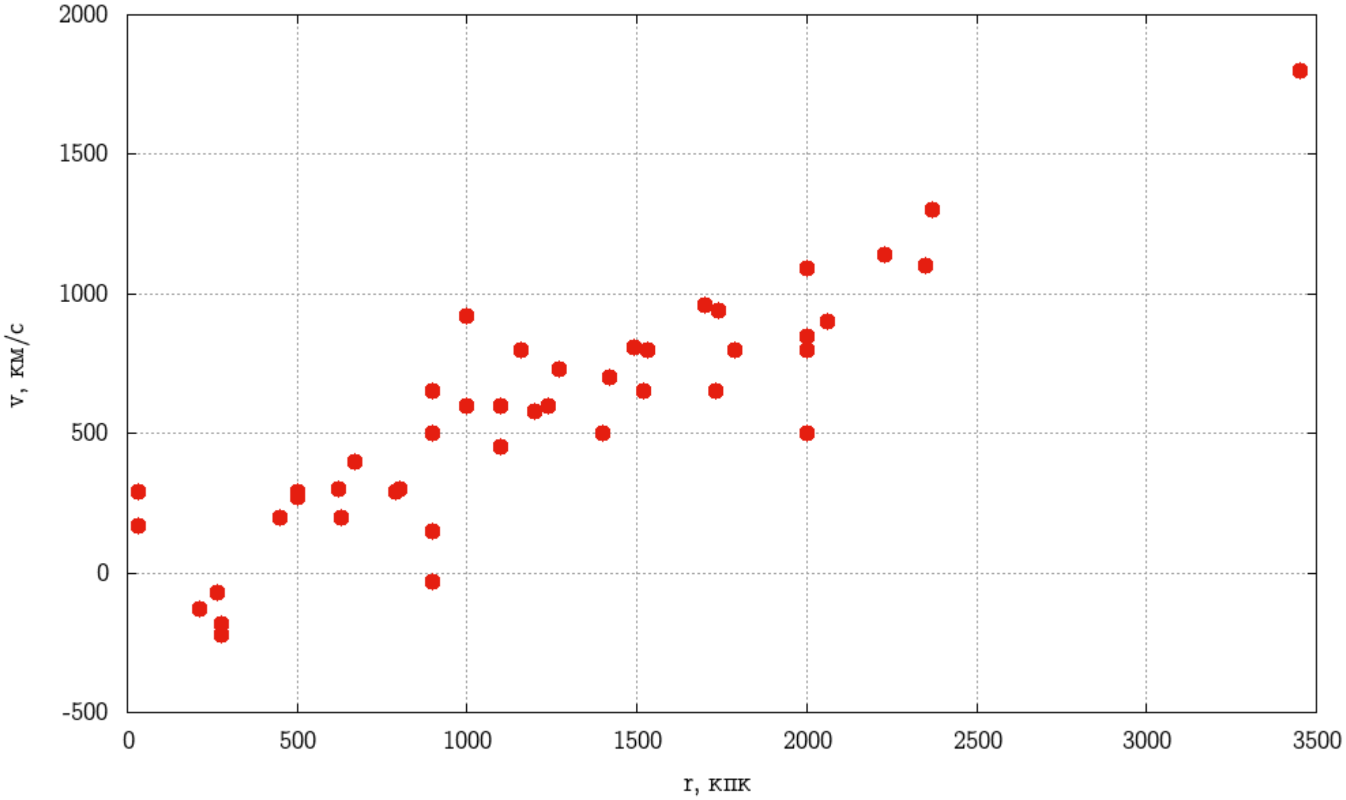
При наблюдениях близких галактик были измерены расстояния до них, а также их лучевые скорости (т.к называется скорость, с которой объект — в данном случае галактика — удаляется от нас или приближается к нам). Результаты наблюдений приведены в таблице ниже. Расстояния r даны в килопарсеках, лучевые скорости v — в километрах в секунду, причем положительное значение означает, что галактика удаляется от нас, а отрицательное — что приближается.

Найдите зависимость лучевой скорости галактики от расстояния до нее, определите параметры этой зависимости и оцените погрешность определения параметров.

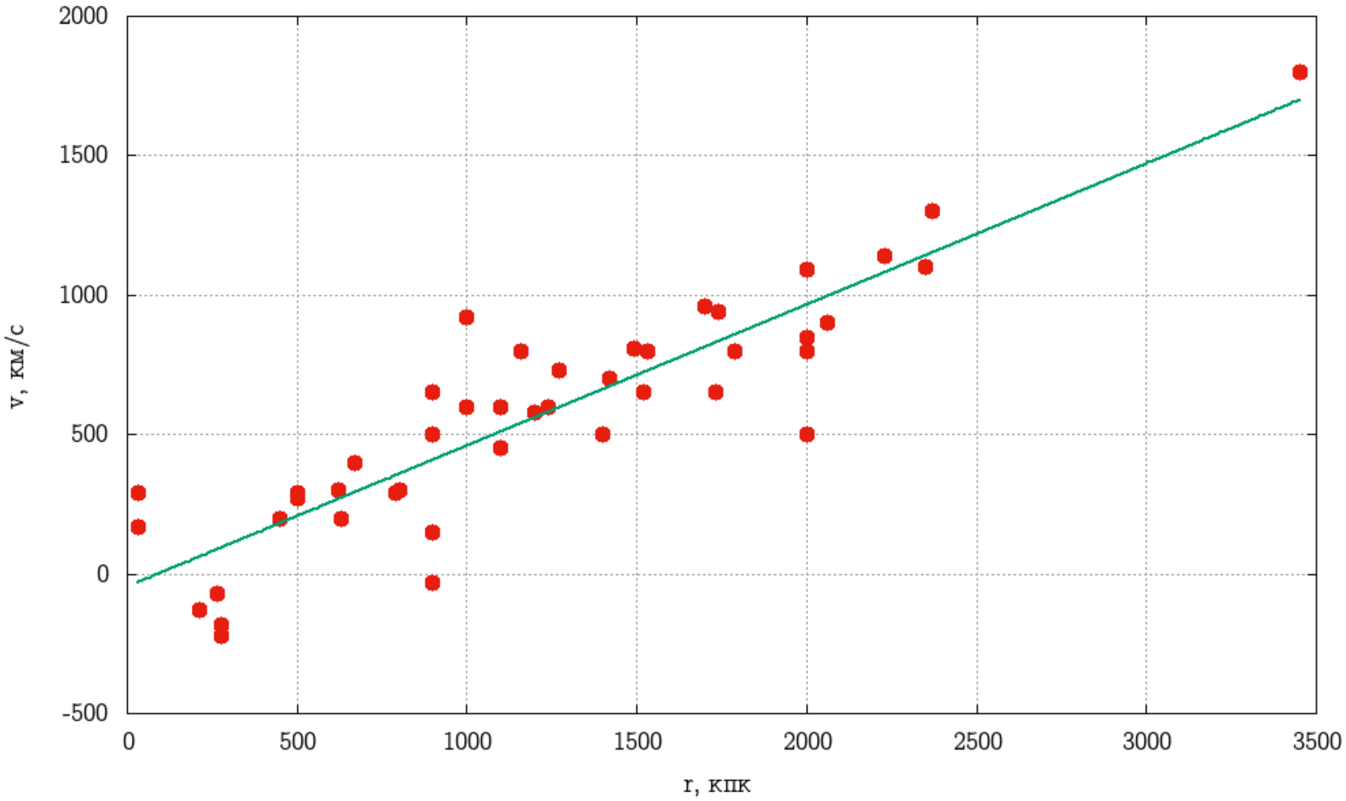
Галактика	r, кпк	v, км/с
SMC	32	+170
NGC 221	275	−185
NGC 224	275	−220
NGC 278	1520	+650
NGC 584	3450	+1800
NGC 598	263	−70
NGC 936	2370	+1300
NGC 1023	620	+300
NGC 1069	1000	+920
NGC 1700	1160	+800
NGC 2681	1420	+700
NGC 2683	670	+400
NGC 2841	1240	+600
NGC 3031	900	−30
NGC 3034	790	+290
NGC 3115	1000	+600
NGC 3368	1740	+940
NGC 3379	1490	+810
NGC 3489	1100	+600
NGC 3521	1270	+730
NGC 3623	1530	+800
NGC 3627	900	+650

Галактика	r, кпк	v, км/с
LMC	34	+290
NGC 4111	1790	+800
NGC 4151	1700	+960
NGC 4214	800	+300
NGC 4258	1400	+500
NGC 4382	2000	+500
NGC 4449	630	+200
NGC 4472	2000	+850
NGC 4486	2000	+800
NGC 4526	1200	+580
NGC 4565	2350	+1100
NGC 4594	2230	+1140
NGC 4649	2000	+1090
NGC 4736	500	+290
NGC 4826	900	+150
NGC 5005	2060	+900
NGC 5055	1100	+450
NGC 5194	500	+270
NGC 5236	900	+500
NGC 5457	450	+200
NGC 5866	1730	+650
NGC 6822	214	−130

Решение. Поскольку требуется найти зависимость между двумя величинами, первое действие, которое стоит сделать — построить график и нанести на него точки. Если это сделать, получится что-то вроде следующего:



Из графика видно, что зависимость примерно линейная. Тогда можно построить прямую, наилучшим образом ее описывающую (это можно сделать «на глаз», результат окажется достаточно неплохим):



Подберем подходящий вид зависимости. Поскольку она линейная, она должна иметь вид $v = k \cdot r + b$. Выбрав две любых точки на прямой и подставив их координаты в зависимость, мы сможем найти значения параметров k и b, однако даже непосредственно по графику видно, что параметр b близок к нулю. Определение параметра k даст результат около 0.5 км/с/кпк.

Какими могут быть погрешности полученного нами результата? Можно заметить, что изменение параметра b сдвигает прямую вверх или вниз, и если мы хотим, чтобы прямая все же хоть сколько-нибудь проходила через точки, то параметр b можно увеличить или уменьшить не более чем на 200 км/с. Изменение параметра k влияет на наклон прямой, разные попытки провести ее через точки позволят увеличить или уменьшить k примерно в полтора раза, примерно такой погрешностью и будут обладать найденные нами значения параметров.

Если вам удалось проделать все это и получить параметр k, то вас можно поздравить: вы успешно воспроизвели результат, полученный в 1929 году Эдвином Хабблом, и открыли закон Хаббла, а вместе с ним и космологическое расширение Вселенной. Правда, данные, которыми пользовался Э. Хаббл (и вы вместе с ним) были очень неточными, поэтому результат оказался завышенным почти на порядок (современное значение постоянной Хаббла равно примерно 70 км/с/Мпк или 0.07 км/с/кпк), однако именно т.к начиналась современная наблюдательная космология.

Задача № 73

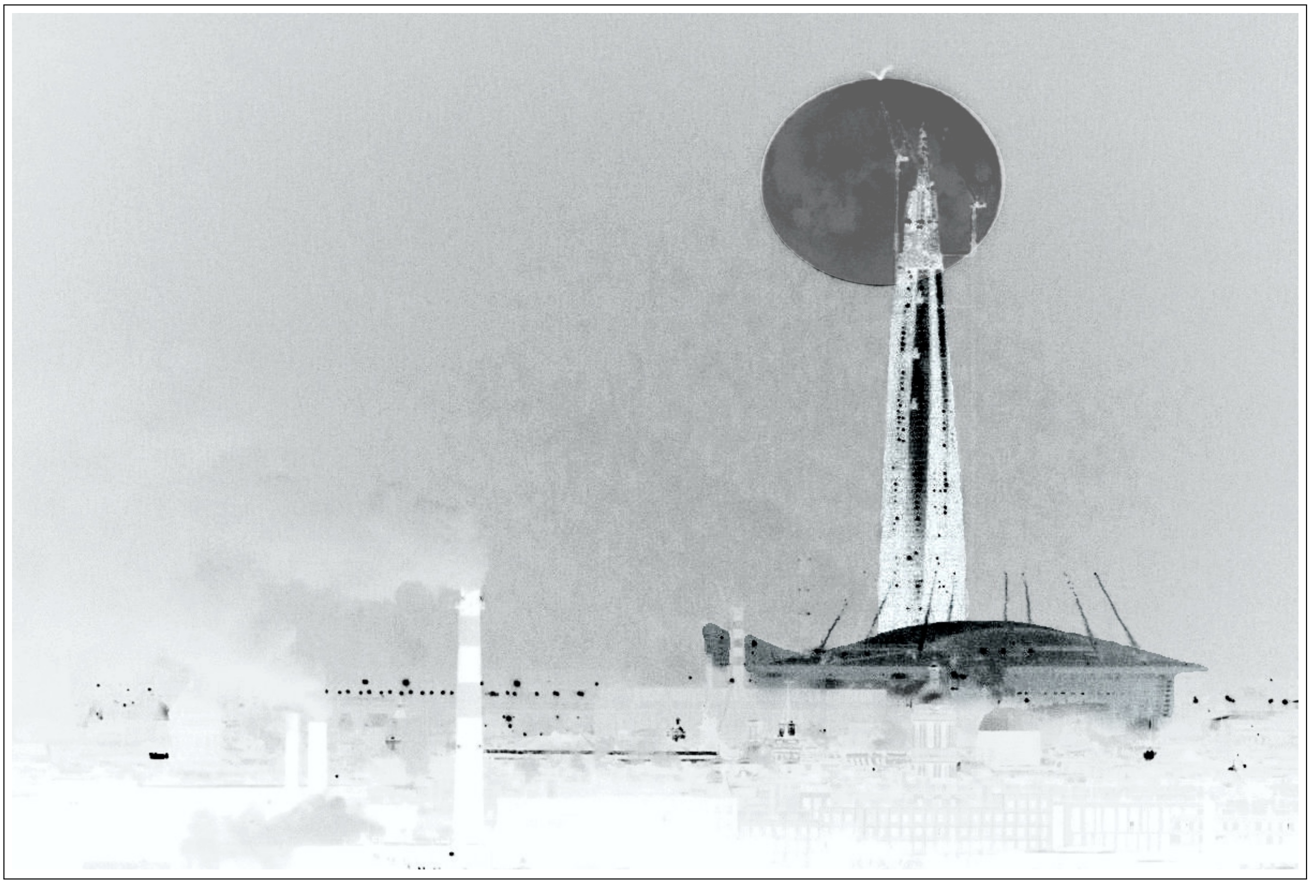
Перед Вами негатив фотографии, на которой изображены две достопримечательности Санкт-Петербурга на фоне кроваво-красной Луны: самый высокий небоскреб в России и Европе «Лахта-центр» и стадион «Санкт-Петербург», более известный под неофициальным названием «Зенит-Арена». Во многих СМИ этот снимок был представлен как фотография полного лунного затмения 31 января 2018 года.

A) Может ли этот снимок на самом деле быть фотографией указанного затмения (в какой-нибудь из фаз)? Объясните свой ответ.

B) Оцените горизонтальные координаты Луны.

C) Оцените расстояние от «Лахта-центра» до фотографа, если высота небоскреба составляет 462 м.

На отдельном листе дана схема затмения с указанием основных моментов по Всемирному времени и карта некоторой области города с координатной сеткой («Лахта-центр» и «Зенит-Арена» отмечены звездочками).



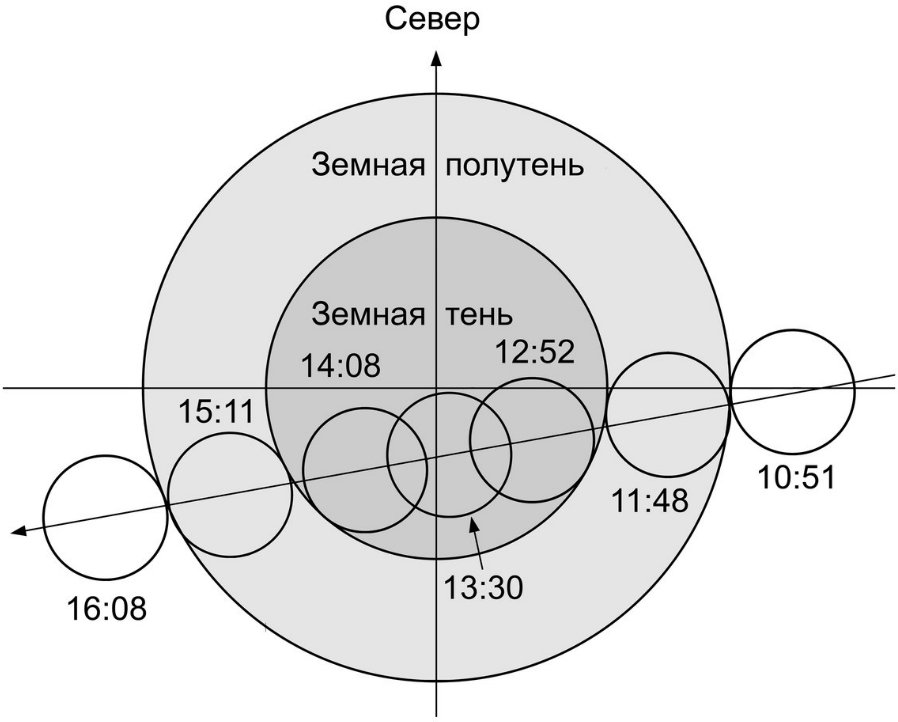
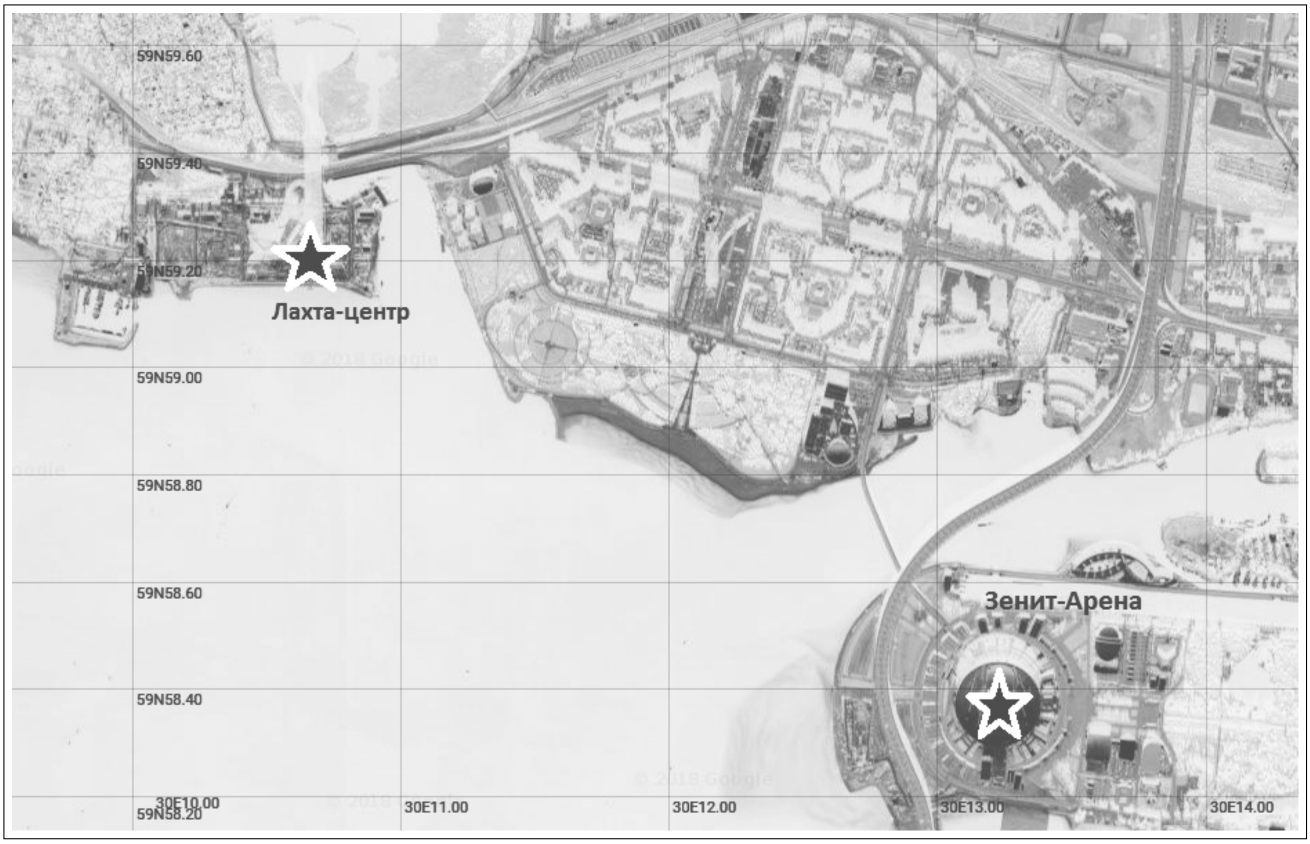


Схема полного лунного затмения 31 января 2018 года



Решение. Начнем решать задачу с конца. Чтобы узнать расстояние до башни «Лахта-центра», необходимо измерить ее угловой размер. Подножие башни закрыто стадионом, положение горизонта также определяется ненадежно. Условно будем считать, что горизонт проходит на уровне подножия стадиона, и примерно там же находится подножие башни. В таком случае высота башни на фотографии составит 83 мм. Для определения углового масштаба изображения измерим размер диска Луны. Диск заметно «сплюснут» из-за рефракции, поэтому в качестве эталона возьмем горизонтальный диаметр Луны, на длину которого рефракция не влияет. Он равен 32 мм. Зная, что угловой размер Луны составляет $32'$, определим угловой размер башни:

$$\rho = 32' \cdot \frac{83}{32} = 83'.$$

Теперь можно вычислить расстояние до башни:

$$D = \frac{h}{\rho} = \frac{462}{83 \cdot 60/206265} \approx 1.9 \cdot 10^4 \text{ м} = 19 \text{ км}.$$

Аналогично, сравнивая расстояние от центра диска Луны до горизонта с диаметром диска, получаем, что высота Луны над горизонтом составляет около $76'$. Конечно, это видимая высота; если бы не было атмосферной рефракции, Луна была бы почти в 2 раза ниже.

Итак, высоту мы нашли, теперь найдем вторую горизонтальную координату — азимут. Луна, «Лахта-центр» и «Зенит-Арена» расположены практически на одной прямой. Как можно заметить по координатной сетке, карта расположена стандартным образом — «север сверху». На всякий случай убедимся, что масштаб изображения по обеим осям совпадает. Действительно, размер «клеточки» на карте – 35 х 14 мм или $1'$ х $0.2'$. Отсюда масштаб изображения по осям 35 мм$/\cos\varphi/1' = 70$ мм/угл.сек вдоль параллели и 14 мм$/0.2' = 70$ мм/угл.сек вдоль меридиана. Здесь $\cos\varphi = \cos 60^\circ = 0.5$ — косинус широты Петербурга.

Определим угол наклона прямой, соединяющей «Лахта-центра» и «Зенит-Арену», к географической параллели. Это можно сделать с помощью прямого измерения угла транспортиром или, например, найти из прямоугольного треугольника. Находим, что этот угол примерно равен 35°. Так как астрономический азимут отсчитывается от точки юга в западную сторону, то искомый азимут Луны составляет $90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$.

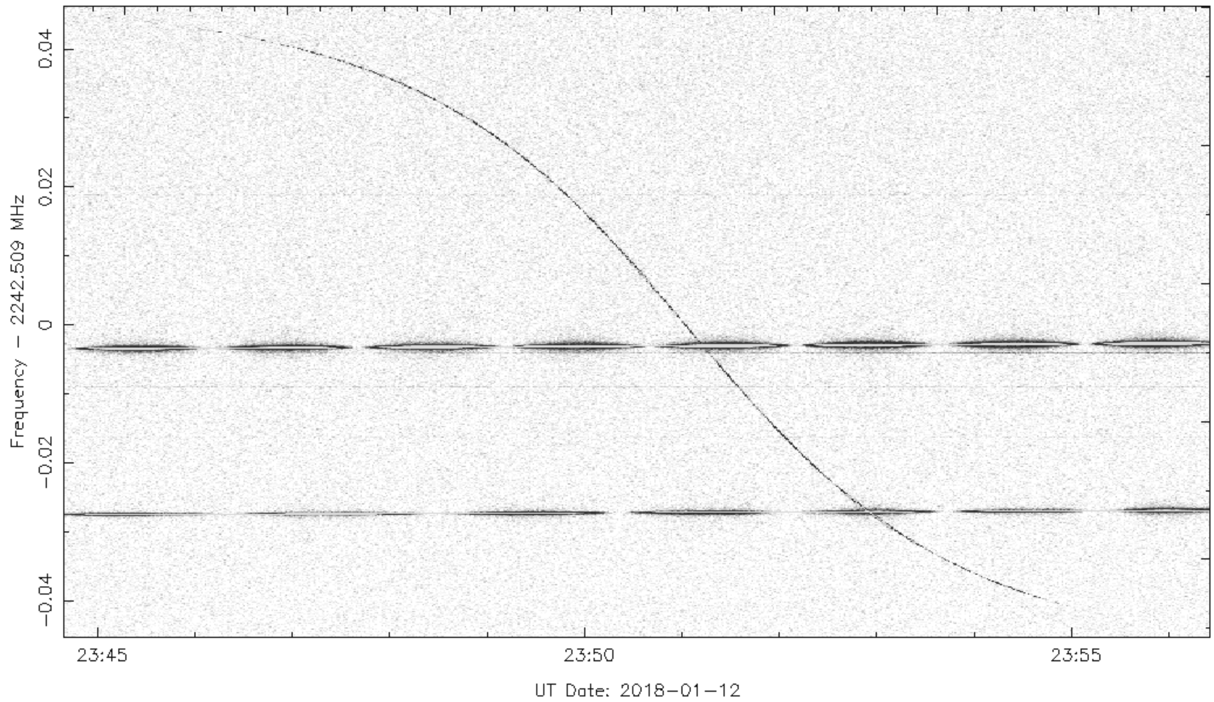
Остался последний, он же первый, вопрос. Лунное затмение происходит в полнолуние, когда Луна находится в противоположной от Солнца точке на небе. Как можно понять по координатам на карте, долгота Петербурга составляет около 30° в.д., поэтому местное солнечное время опережает Всемирное на 2 часа. Гражданское (оно же московское) с учетом декретного времени ещё на 1 час больше. Это значит, что затмение происходило с 12:51 до 18:08 местного времени (или с 13:51 до 19:08 по московскому). Большая часть затмения пришлась в Петербурге на дневное время, когда Луна находилась под горизонтом, и петербужцы могли увидеть только заключительные фазы затмения вечером на восходе Луны. На фотографии же Луна запечатлена на северо-западе незадолго до захода. Таким образом, даже если эта фотография и была сделана в указанную дату, то никак не во время затмения.

Задача № 74

Радионаблюдатель из Амстердама (широта $\varphi = 52^\circ$, долгота $\lambda = 5^\circ$, первый часовой пояс) зафиксировал пролет неизвестного спутника в своем небе 12 января 2018 года, причем спутник прошел через зенит, а угол между точками восхода и захода спутника составлял 180°. График интенсивности принятого радиосигнала в зависимости от времени и частоты представлен ниже. Определите:

- большую полуось орбиты спутника;
- эксцентриситет орбиты спутника;
- угол наклона орбиты спутника к земному экватору;
- ближайший момент (по местному гражданскому времени), когда радионаблюдатель мог снова зарегистрировать этот же спутник при помощи своего приемника.

Время (по оси абсцисс) указано в часах и минутах, частота (по оси ординат) — в мегагерцах, причем из частоты вычтена постоянная константа 2242.509 МГц.



Решение. На графике явно видны две горизонтальные радиополосы, являющиеся результатом приема сигнала от радиоисточников, находящихся на поверхности Земли (скорее всего, это передатчики сотовой вышки). Поэтому «полезный сигнал» со спутника — явно выраженный кусочек синусоиды. Смещение сигнала спутника по частоте вызвано эффектом Допплера, связанным с наличием у спутника лучевой скорости v_r:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_r}{c},$$

где $\Delta\nu$ — смещение частоты от центральной ν_0 (собсвтенная частота передатчика, установленного на спутнике), а c — скорость света. Таким образом, точка, в которой частота принимаемого сигнала равна чатоте излучаемого (эта же точка является центром кусочка синусоиды) является точкой орбиты спутника, в которой его скорость строго перепендикулярна лучу зрения, то есть это момент прохождения через зенит.

По графику можно определить $\Delta\nu = 0.045$ МГц (в зависимости от качества печати может получиться значение 0.04, что не считалось ошибкой), что по формуле для эффекта Допплера дает значение лучевой скорости $v_r = 4.5/2.24 \times 10^{-5} \cdot 3 \times 10^5$ км/с $\approx \pm 6$ км/с в моменты захода и восхода соответственно. Из симметричности графика сигнала и его близости к синусоиде можно заключить, что лучевая скорость меняется у спутника лишь из-за наличия угла между линейной скоростью спутника и лучом зрения.

Так как атмосфера в радиодиапазоне прозрачна, то можно считать, что самая левая точка на графике — вылет спутника из-за горизонта, соответственно, правая точка — заход спутника за горизонт. По нижней оси видно, что спутник был доступен для наблюдения в течение отрезка времени $\tau \approx 11$ минут. За такое время

Земля поворачивается на незначительный угол (около 3°), поэтому вращением Земли вокруг своей оси можно пренебречь. Максимальная поправка в лучевую скорость из-за вращения Земли составляет 0.5 км/с на экваторе, а с учетом широты — не более 0.3 км/с, что для нашей точности вполне приемлемо.

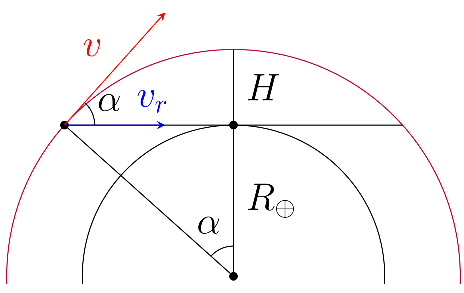
Не умаляя общности, можно сказать, что спутник взошел в точке востока, а зашел в точке запада. Действительно, из-за вращения Земли вокруг своей оси орбита спутника будет поворачиваться относительно наблюдателя, т.к что такой момент когда-нибудь настанет. Тогда момент кульминации спутника в зените означает, что **угол наклона орбиты равен широте места:** $i = \varphi = 52°$.

Исходя из симметрии графика можно заключить, что в момент прохождения через зенит спутник также проходит через апоцентр или перицентр своей орбиты. Можно попытаться аккуратно расписать, как соотносятся скорости и расстояния в момент восхода спутника и мгновенная линейная скорости через элементы эллиптической орбиты. При этом все равно придется воспользоваться некоторыми упрощениями (например, что расстояние до поверхности во время видимости спутника не меняется или что в в момент восхода спутника его скорость можно считать равной скорости в перицентре). Все это может излишне усложнить решение задачи, а при неаккуратности в подсчетах привести к заведомо нефизичному ответу (например, что большая полуось орбиты спутника окажется меньше радиуса Земли). Так что для простоты рассмотрим случай круговой орбиты.

Модуль лучевой скорости на заходе и восходе определен ранее: $v_r = 6$ км/с, а скорость спутника, исходя из предположения выше, считаем круговой:

$$v = \sqrt{GM_\oplus/a}$$

Здесь G — гравитационная постоянная, $M_\oplus$ — масса Земли, $a = R_\oplus + H$, $R_\oplus$ — радиус Земли, H — высота спутника над поверхностью). Тогда для понимания связи между этими величинами полезно нарисовать рисунок:



Из рисунка очевидна связь:

$$\frac{v_r}{v} = \cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H} = \frac{R_\oplus}{a},$$

что с учетом выражения для круговой скорости дает

$$v_r a^{3/2} = R_\oplus\sqrt{GM_\oplus}.$$

Тогда радиус орбиты вычисляется (в СИ):

$$a = \sqrt[3]{\frac{R_\oplus^2}{v_r^2} GM_\oplus} = \sqrt[3]{\frac{(6.4 \times 10^6)^2}{(6 \times 10^3)^2} \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.4^2 \cdot 6.67}{6} \times 10^{12-6-11+24}} \approx \sqrt[3]{455} \times 10^6 \text{ м} \approx 7700 \text{ км}.$$

Итак, **радиус орбиты спутника** $a = 7700$ **км**. Это значение не очень велико, и, в принципе, позволяет нам сказать, что предположение о круговой орбите было верным, и **эксцентриситет** $e = 0$.

Используя третий уточненный закон Кеплера, можно вычислить период обращения спутника вокруг Земли:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_\oplus}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_\oplus^2}{v_r^2}} = \frac{2\pi R_\oplus}{v_r} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6400}{6} \approx 112^m = 1.9^h.$$

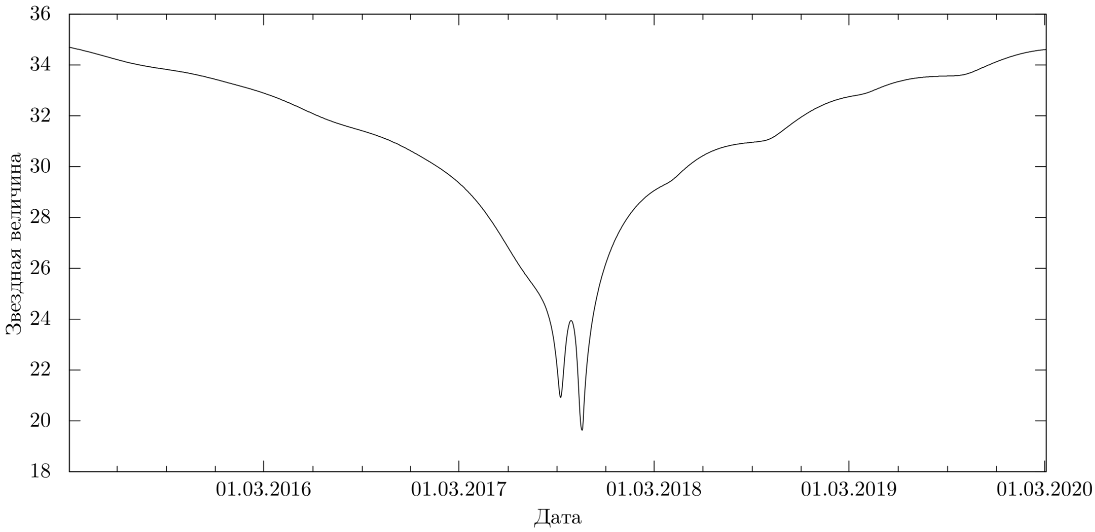
Тогда можно получить синодический период спутника S, если он движется в противоположную (знак минус) сторону (в этом случае угол наклона орбиты спутника формально равен $i = 180° - 52° = 128°$), или в ту же, что и Земля (знак плюс):

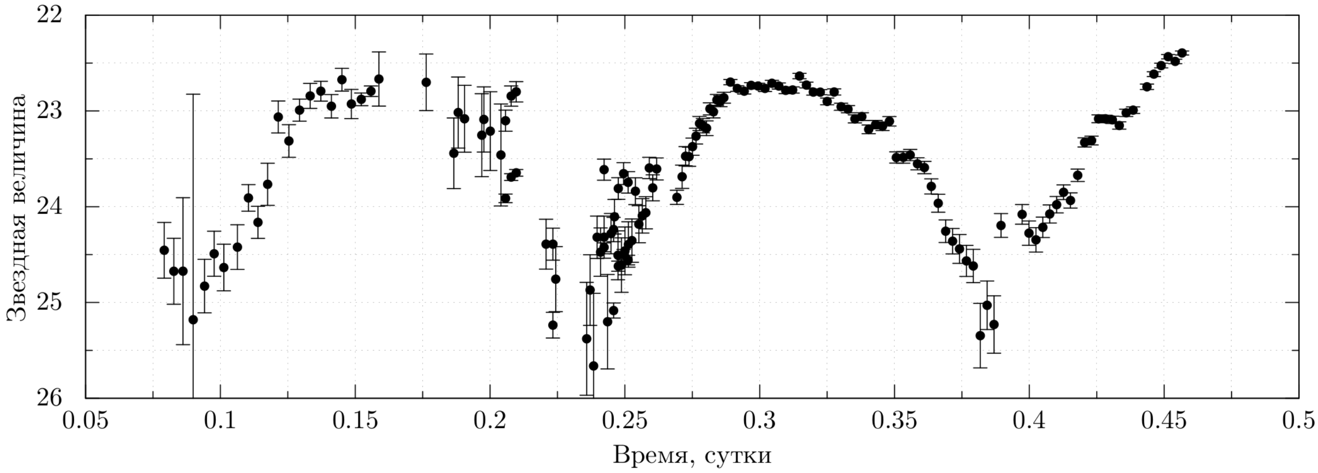
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1.9^h} \pm \frac{1}{24^h} \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{1.9 \cdot 24}{24 \pm 1.9} \approx 1.7^h \text{ или } 2.1^h,$$

что означает, что в следующий раз спутник взойдет в $1^h\ 37^m$ или в $1^h\ 51^m$ 13 января 2018 года UT. С учетом того, что Голландия живет в поясе UTC+1 (несмотря на долготу — так же, как Франция и Испания), наблюдения проводятся в январе (поэтому летнее время не влияет), то спутник **взойдет в** $2^h\ 37^m$ **или** $2^h\ 51^m$ **13 января 2018 года** по гражданскому времени.

Задача № 75

Вам даны кривые блеска некоторого объекта, находящегося в Солнечной системе, полученные при наблюдениях с Земли. По оси ординат на обоих графиках отложена видимая звездная величина в оптическом диапазоне. Из фотометрических наблюдений объекта в системе $u'g'r'i'z$ известны его показатели цвета: $g-r = 0^m.85$, $g-i = 1^m.15$ и $g-z = 1^m.25$. Характерные длины волн полос в этой фотометрической системе равны: для полосы g — 4750 Å, r — 6250 Å, i — 7700 Å, z — 10000 Å. Известно, что в перигелии своей орбиты объект находился на расстоянии 0.25 а.е. от Солнца. Определите все параметры этого объекта и его орбиты, которые Вы сможете получить из приведенных данных.





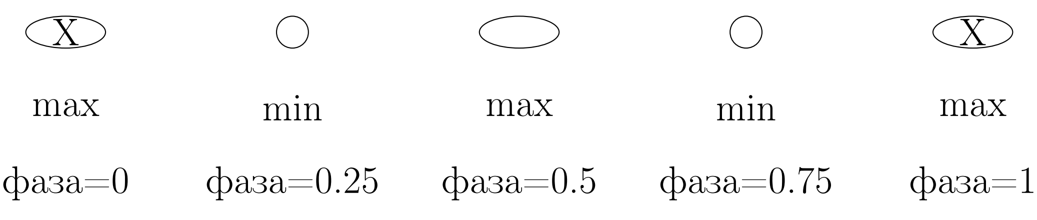
Решение. В условии сказано, что объект находится в Солечной системе, поэтому очевидно, что это не звезда, следовательно, объект светит отраженным солнечным светом. По данным показателям цвета можно понять, что в сине-зеленой части оптического диапазона объект примерно в 3 раза слабее, чем в далекой красной и ближней ИК. Следовательно, объект очень темный, т.е. его альбедо в видимой области мало (в противном случае спектр объекта примерно совпадал бы со спектром Солнца). Из этого факта сразу можно сделать предположение о природе объекта. Видимо, это скорее не ледяное, а каменное тело с малым коэффициентом отражения, подобно темным астероидам.

Из того, что в качестве характерной длины волны для полосы z даны 10000 $\mathring{A}$, а показатель цвета $g - z$ — наибольший из приведенных, не следует, что на длину волны 10000 $\mathring{A}$ приходится максимум энергии в спектре объекта. Показатели цвета непрерывно растут, и сказать по приведенным четырем (показатель $g - g = 0^m$, что очевидно) значениям растущей на заданном отрезке функции, где будет ее максимум, не представляется возможным. Тем более неправомерно оценивать температуру объекта, используя формулу смещения Вина с $\lambda_{max} = 10000\,\mathring{A}$, так как собственное тепловое излучение тела наверняка имеет максимум в гораздо более длинноволновой области. Если есть желание определить температуру объекта, то можно оценить ее, например, в перигелии его орбиты, как равновесную для такого расстояния от Солнца. Так как объект очень темный, то с хорошей точностью его можно считать абсолютно черным телом (альбедо равно 0). Тело получает от Солнца на единицу площади своей поверхности количество энергии, равное $L_\odot/4\pi r^2$, где $L_\odot$ — светимость Солнца, а r — расстояние от Солнца до тела, а испускает с единицы площади своей поверхности количество энергии, равное σT^4. Приравнивая энергии, выражая T, подставляя числа ($r = 0.25$ а.е.) и вычисляя, получаем оценку $T \approx 600$ K. Эту оценку можно получить гораздо быстрее, если вспомнить, что равновесная температура на орбите Земли порядка 300 K (на самом деле, чуть меньше, около 280 K), а зависимость ее от расстояния от Солнца очевидным образом выглядит так: $T \propto 1/\sqrt{r}$. Таким образом максимум собственного теплового излучения тела лежит в области около 55 тыс. Å.

По нижней кривой блеска можно понять, что объект меняет на очень коротком промежутке яркость примерно на $2^m.5$, причем периодически. Период изменений равен 3.6 часа. Очевидно, это не может быть из-за удаления от Солнца. Таким образом остается предположить, что эти изменения связаны с вращением объекта вокруг своей оси. Из разности звездных величин в разных фазах вращения получаем, что отношение яркостей двух сторон объекта достигает 10. Разные стороны объекта могут отражать разное количество света либо из-за разного альбедо, либо из-за разной площади (правда, возможно и сочетание этих двух факторов). Сложно представить себе движущийся рядом с Солнцем объект, который имел бы шарообразную форму и при этом состоял из 2-х половинок, альбедо которых различалось бы в 10 раз. Однако, если это так, то период вращения объекта равен периоду изменений блеска, 3.6 часа.

Если все же принять, что альбедо постоянно по всей поверхности, то изменения связаны с формой. Тогда площади сторон, «видимых» в максимуме и минимуме блеска различаются в 10 раз. В простом случае, когда объект представляет собой эллипсоид вращения, можно оценить отношение его малой и большой осей. В этом случае его максимальная площадь пропорциональна произведению максимального и минимального размера, а минимальная — квадрату минимального. Тем самым соотношение размеров 1:10.

Заметим, что если объект обладает вытянутой формой, то период его вращения в 2 раза больше, чем период изменения блеска, т.е. 7.2 часа. Проще всего показать это на рисунке. «Пометим» одну из длинных сторон объекта (X) и отметим на рисунке моменты максимумов (max) и минимумов (min) кривой блеска в разные фазы вращения:



Заметим также, что подобное изменение блеска нельзя объяснить тем, что объект двойной. Получить этот вывод можно, поняв, что в этом случае максимальный блеск объекта станет меньше (поскольку окажется «не работающей» площадь между двумя компонентами), и для объяснения столь сильных изменений блеска все равно придется считать компоненты сильно вытянутыми (и ориентированными вдоль одной прямой), что менее вероятно, чем одиночный объект той же формы.

Рассмотрим 5-летнюю кривую блеска. По поведению кривой на краях очевидно, что объект ярчал и до 2015 года и продолжит терять яркость и после 2020 года. То есть движение объекта не обладает периодом в 5 лет. По длинной кривой блеска видно, что объект во второй половине 2017 года 2 раза приближался к Земле/Солнцу. Так как яркость объекта зависит от расстояний как от Солнца, т.к и до Земли, то можно считать, что один из пиков яркости соответствует минимальному расстоянию объекта от Солнца, а второй — минимальному расстоянию от объекта до Земли. Видно, что пики несимметричные, но для оценок их можно считать равными по величине. Минимальная звездная величина объекта, достигнутая в 2017 году, около $19^m.5$. Максимальная (в 2015 и в 2020) — около $34^m.5$. Разность около 15^m, что приводит к отношению освещенностей 10^6. Если грубо оценить отношение освещенностей, как отношение расстояний в 4 степени, то получим, что расстояние до объекта изменится примерно в 30 раз, т.е. объект к 2020 году удалится далеко от Солнца (примерно на десяток а.е.). Оценим, насколько. Вблизи перигелия объект получает от Солнца на единицу площади количество энергии, равное $L_\odot/4\pi r_1^2$, где r_1 — расстояние от Солнца до объекта в перигелии, освещенность на Земле от объекта, находящегося в перигелии равна,

$$E_1 = \frac{SAL_\odot}{4\pi r_1^2 \cdot 4\pi r^2},$$

где S — площадь объекта, A — его альбедо, r — расстояние от объекта в перигелии до Земли. Вполне можно считать, что $r = 1$ а.е. Фазу можно считать полной, так как фазовый угол неизвестен.

В 2020 году объект будет далеко как от Солнца, т.к и от Земли, потому освещенность от него на Земле будет равна

$$E_2 \approx \frac{S \cdot A \cdot L_\odot}{4\pi r_2^4},$$

где r_2 — расстояние от Солнца до объекта в 2020 году. Так как $E_1/E_2 = 10^6$, преобразуя выражения и подставляя числа, после несложных расчетов получаем, что к 2020 году объект удалится от Солнца примерно на 15 а.е. Следовательно, примерно за 2.5 года объект пройдет около 15 а.е. Тем самым средняя скорость движения объекта составляет около $15/2.5 \approx 6$ а.е./год или чуть меньше 30 км/с.

Так как понятно, что вблизи перигелия скорость намного больше средней, то попытаемся оценить среднюю скорость на меньшем участке вблизи конца «видимой» нам траектории, где скорость меняется уже не так сильно. Для этого выберем участок кривой блеска, где звездная величина меняется приблизительно линейно. Это участок от 01.03.2018 до 01.03.2020. На нем звездная величина меняется примерно на 5, следовательно, отношение освещенностей равно примерно 100, тогда отношение расстояний с хорошей точностью можно оценить как $\sqrt[4]{100} \approx 3$. Стало быть на этом участке кривой блеска расстояние от объекта до Солнца/Земли будет от 5 до 15 а.е., т.е. за 2 года объект пройдет 10 а.е., таким образом на этом участке его средняя скорость будет равна 5 а.е./год. Посмотрим, как эта скорость соотносится с кеплеровскими скоростями в Солнечной системе. Круговая скорость на расстоянии 5 а.е. от Солнца равна $6.28/\sqrt{5}$ а.е., параболическая — $\sqrt{2} \cdot 6.28/\sqrt{5} = 6.28/\sqrt{2.5} \approx 4$ а.е./год. Таким образом, средняя скорость движения объекта на большом участке от 5 до 15 а.е. превышает параболическую на расстоянии 5 а.е. от Солнца. Следует сделать вывод, что объект движется по гиперболической орбите и, следовательно, если это не явилось следствием близкого сближения с какой-либо планетой, то объект почти наверняка не принадлежит Солнечной системе.

Можно попробовать оценить размеры объекта, сравнив его звездную величину в перигелии с Солнцем: $m_\odot - m = -2.5 \lg E_\odot / E$. Освещенность от Солнца на Земле $E_\odot = L/4\pi r_\odot^2$, где $r_\odot = 1$ а.е., $m_\odot = -27$, можно принять, что $m = 20$. Тогда, подставляя числа в выражение для освещенности, создаваемой объектом в перигелии, получаем, что $S \cdot A \approx 10^3$ м^2. Если альбедо принять равным $A = 0.1$ (нормальное «каменное» альбедо, чуть меньше, чем у Луны), то $S \approx 10^4$ м^2. Будем считать, что видна бóльшая сторона объекта. Тогда размеры его составляют порядка 200×20 м. Если же принять альбедо равным порядка $A = 0.01$ (как у сажи), то $S \approx 10^5$ м^2, а размеры порядка 500×50 м.

Осталось отметить, что прототипом объекта из задачи послужил 1I/Оумуамуа — первый надежно подтвержденный межзвездный астероид, пролетающий сквозь Солнечную систему.